RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geodesia. — *Riassunto dei lavori di collegamento e di verifica del valore della gravità in Palermo.* Nota del Corrispondente A. Venturi.

Il contributo, che alle misure internazionali di gravità cerca di portare l'Istituto geodetico della R. Università di Palermo, dapprima da solo, poi coll'appoggio della R. Commissione geodetica italiana, data dal 1899. L'apparato di Sterneck, che detto Istituto possiede, fu campionato a Vienna, dallo stesso inventore, nel marzo 1899; mentre a Palermo, la prima determinazione di gravità fu eseguita con quello strumento nel luglio-settembre di quell'anno medesimo. Seguì la campagna gravimetrica dell'agosto 1899; poi, dopo una verifica locale fatta nel 1901 sui quattro pendoli, per accertarne una eventuale variazione di lunghezza, e dopo una sosta involontaria, ebbero luogo le campagne del 1904, 1905, 1906. Palermo era, naturalmente, la stazione fondamentale cui dovevano riferirsi le misure istituite nei diversi luoghi, percorsi nelle varie campagne; però non poteva dirsi una sicura base di operazione, senza un valido controllo, esplicato per mezzo di una comparazione ulteriore con Vienna o con altro luogo, già con Vienna sicuramente legato. Inoltre, per poter riunire ad unico sistema tutte le misure eseguite in Sicilia, occorreva un riattacco fra le determinazioni eseguite nella regione orientale dal chiar. prof. Riccò, e le mie, che si estendono sul rimanente territorio dell'Isola.

Questi lavori di collegamento e di verifica, che erano indispensabili per dare salda base alla rete gravimetrica di Sicilia, io ho eseguiti in questi due ultimi anni, in occasione delle periodiche campagne che hanno per fine di dotar l'Isola di un ben distribuito sistema di valori della gravità. Riserbandomi di dar conto di tutto a suo tempo, credo utile, data l'importanza della questione, di fare subito una trattazione a parte dei lavori compiuti a scopo specifico di collegamento e di verifica, onde dimostrare che il sistema gravimetrico siciliano risponde alle giuste esigenze scientifiche che il metodo di Sterneck può consentire, e che quindi può aspirare alla parte che gli sarà fatta nelle ricerche avvenire sulla forma del Geoide.

Per l'esecuzione del prestabilito piano, senza ritornare a Vienna, esistendo a Padova, come ognuno sa, delle magistrali determinazioni di gravità relativa con riferimento a Vienna medesima, mi rivolsi all'illustre prof. Lorenzoni, cultore autorevole di tali studî; ed egli, colla cortesia che lo distingue, volle incaricarsi della nuova campionatura dei nostri pendoli. Le operazioni relative, compiute sotto l'alta direzione di lui, dal personale dell'Osservatorio di Padova, proff.[i] Ciscato, Antoniazzi e G. Abetti, ebbero luogo nei giorni 12-16 luglio 1906. Mi onoro porgere pubblicamente a tutti le mie più vive azioni di grazie.

Quanto al secondo proposito, cioè, di collegare le operazioni orientali colle occidentali, previo accordo col chiar. prof. Riccò, ho eseguito, quest'anno, fra le altre stazioni della campagna, anche quella di Milazzo, ove il detto professore fece, nel 1898, una delle sue determinazioni. L'allacciamento con Padova seguì a mezzo di due operazioni fatte in Palermo nel luglio-settembre 1905, alla distanza di 47 giorni; quello con Milazzo si effettuò pure con altre due operazioni eseguite qui ultimamente nel luglio-settembre 1906, alla distanza di 45 giorni. A Milazzo la stazione fu da me eseguita nei giorni 20, 21, 22 agosto 1906. Non essendo stato possibile stazionare nel luogo ove operò il prof. Riccò nel 1898, essendo esso stato adibito ad uso diverso, feci le operazioni in un locale poco discosto, alla stessa precisa altitudine di quello, di competenza della R. Cantina sperimentale; e compio il dovere di ringraziare il direttore di essa Cantina, dott. Pagnotta, che mi diè modo di accedervi.

***

Il metodo seguito nelle misure fu, per ragione di omogeneità, il medesimo di quello sempre tenuto: con sedici prove pendolari (quattro per ogni pendolo), divise in due giorni, e con doppia determinazione di tempo all'Universale Salmoiraghi aventi i circoli di 29 cm. di diametro. Si usarono stelle nel verticale della polare, e altre nel 1° verticale, anche a scopo di controllo; le determinazioni singole erano da sedici a venti ogni sera. Nell'Istituto di Geodesia si veniva, così, ad investigare l'andamento del regolatore Strasser e Rhode: indi si pigliavano cronograficamente dei confronti periodici fra questo

e il pendolo Hawelk, animatore dell'apparato di coincidenza. Gli stati di questo pendolo, riportati negli specchietti che seguono, si ottennero riducendo tutti i confronti di un giorno ad un istante ideale medio, che sarebbe quello il quale nello specchietto è intestato con le parole « Data siderale ». A Milazzo, invece, il tempo si determinava direttamente sull'Hawelk.

Quanto alla correzione della durata di oscillazione dei pendoli Sterneck dovuta all'andamento dell'orologio, è chiaro che essa dipende, in ultima analisi, dai quattro stati assoluti di quest'ultimo, determinati, coi due metodi, nella prima e terza sera, cioè avanti e dopo le oscillazioni pendolari diurne. Se si dicono rispettivamente E_1 , e_1 , E_3 , e_3 gli errori medî competenti a ciascuno di quei quattro stati, due della 1ª sera e due della 3ª, l'errore medio μ della marcia diurna media, che, come si è detto, è l'unico elemento da cui dipende la correzione dovuta all'andamento dell'orologio, sarà dato dalla espressione

$$\mu = \frac{1}{4}\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + e_1^2 + e_3^2}\,.$$

Le E, e vedremo esser poco diverse da $0^s,1$; e le μ si troveranno tutte vicinissime a $0^s,06$: sicchè l'errore medio dell'andamento orario medio complessivo, non sarà molto diverso da $0^s,0025$; valore soddisfacente, se si considera che per esso la gravità non sarebbe influenzata che di circa un'unità e mezza di millesimi di centimetro.

I termometri Voytacich furono nuovamente campionati nell'Istituto fisico del chiar. prof. Macaluso, cui rendo nuove grazie. Il barometro aneroide Negretti e Zamba era confrontato spesso coll'ottimo Fortin del Gabinetto di Geodesia. Le operazioni in questo furono eseguite nel solito ottimo locale terreno ove già furono compiute tutte le altre.

***

I valori delle durate di oscillazione a Vienna che i pendoli avevano nel marzo 1899, secondo la determinazione di Sterneck, erano, in tempo siderale:

116	117	118	119
^{s} 0,5060985	^{s} 0,5068056	^{s} 0,5070120	^{s} 0,5069882

e la gravità a Vienna, qual base di tutte le determinazioni relative, costituente il cosidetto *Wiener-System*, è

$$g_v = 980^{cm},876\,.$$

A Palermo, i valori d'oscillazione degli stessi pendoli, nel luglio-settembre

dello stesso anno, furono (1)

116	117	118	119
s 0,5062974	s 0,5070071	s 0,5072195	s 0,5071922

dalle quali, colle precedenti, si dedusse la gravità a Palermo,

$$g_p = 980^{cm},090 \pm 0^{cm}005.$$

A Padova, nel 1905, giusta la relazione trasmessami dal prof. Lorenzoni, lo stato dell'orologio fu determinato dal dott. Antoniazzi; il quale, in base agli stati del regolatore Frodsham 1604, trovò, pel cronometro Nardin delle coincidenze $\left(N° \frac{32}{7843}\right)$, l'andamento diurno:

$$+ 2^s,99 \pm 0^s,06$$

sul tempo siderale. Il prof. Ciscato e il dott. G. Abetti osservarono le oscillazioni in quantità eguali, ciascuno: l'amplitudine di quelle era di 12′: il numero delle coincidenze era di 72. Trascrivendo i loro dati nelle mie abituali forme, si ha il quadro:

Osservazioni gravimetriche a Padova, 1905.

Data civile	Pend.	*c*	*t*	*b*	*s*	Data civile	Pend.	*c*	*t*	*b*	*s*
Luglio		s	°	mm	s	Luglio		s	°	mm	s
12,389	116	40,2545	22,34	760,9	0,5061424	14,375	116	40,2507	22,28	759,7	0,5061433
12,490	117	36,2369	22,41	60,7	68490	14,427	117	36,2404	22,37	59,7	68486
12,611	118	35,2067	22,40	59,7	70568	14,708	118	35,1885	22,40	59,4	70606
12,682	119	35,3320	22,50	59,5	70304	14,781	119	35,3254	22,39	59,6	70323
13,320	119	35,3429	22,16	60,6	70297	15,437	118	35,1992	22,20	61,6	70591
13,399	118	35,2129	22,31	60,9	70557	15,689	117	36,2290	22,25	60,3	68514
13,652	117	36,2479	22,29	58,3	68477	15,759	116	40,2528	22,28	60,2	61430
13,708	116	40,2520	22,42	57,7	61426	16,358	119	35,3239	22,09	62,0	70338

ove, come nelle altre mie Memorie, la data civile dell'istante medio delle osservazioni è in tempo dell'E. C. La colonna *c* indica la durata, in tempo siderale, dell'intervallo tra due coincidenze successive: *t* la temperatura cen-

(1) Venturi, *Determ. di gravità relativa* ecc., R. Accademia di Palermo, ser. 3ª, vol. VI, Palermo, 1901.

tigrada, b la pressione barometrica ridotta a 0°, s infine indica la durata dell'oscillazione in tempo siderale, corretta, cioè fatte le riduzioni a 0°, al vuoto, all'arco infinitesimo ed al secondo siderale.

Le oscillazioni medie per ogni pendolo a Padova, sono, per ciò che precede:

116	117	118	119
s 0,5061428	s 0.5068492	s 0,5070581	s 0,5070315

Infine la gravità a Padova, in quanto dedotta dal *Wiener-System*, che è quella che qui dobbiamo impiegare, è

$$g_{pd} = 980^{cm},677.$$

* * *

Quanto a Palermo (Istituto geodetico alla Martorana) già si è detto che le operazioni si fecero al modo di tutte le altre volte; appena giunti da Padova i pendoli, si fece la prima determinazione, nei giorni 23, 24 e 25 luglio: seguì la campagna gravimetrica, di cui darò conto in una prossima pubblicazione; e nei giorni 7, 8, 9 settembre fu eseguita la seconda determinazione di controllo. Qui si riuniscono i dati dell'una e dell'altra, cominciando dalle tabelle degli stati del pendolo Hawelk. In queste, chiamo con A e con B le due distinte determinazioni di tempo, e sotto la colonna corrispondente è segnato lo stato assoluto di Hawelk, col rispettivo errore medio solo agli stati della 1ª e 3ª sera, poichè da questi soli, dipende μ. Seguono gli andamenti orarî rispetto al tempo siderale (1).

Stati di Hawelk ed andamenti orarî, Palermo 1905.

Data siderale	Determinazione A		Determinazione B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.	Stato assoluto	And. or.	
Luglio	h m s s	s	h m s s	s	s
23,765	— 9.47.27,24 ± 0,12	— 0,238	— 9.47.27,26 ± 0,07	— 0,227	— 0,232
24,557	31,75	— 0,266	31,57	— 0,253	— 0,260
25,342	36,74 ± 0,15		36,33 ± 0,12		
Settembre					
7,768	+ 16.01.52,93 ± 0,09	+ 0,097	+ 16.01.52,61 ± 0,16	+ 0,104	+ 0.100
8,776	55,25	+ 0,165	55,10	+ 0,170	+ 0,168
9,769	59,21 ± 0,12		59,17 ± 0,13		

(1) L'Hawelk si monta e smonta ad ogni stazione: quindi non deve far meraviglia la diversità dello stato assoluto tra luglio e settembre.

Calcolando, come si è detto poco sopra, l'errore medio di ciascun andamento orario complessivo di luglio e di settembre, si trova per entrambi

$$\pm 0^s,0025$$

che corrisponde ad un errore medio, sull'andamento medio diurno, di $0^s,06$, come si è riscontrato a Padova.

Seguono, ora, le osservazioni gravimetriche di Palermo, prima e dopo la campagna; delle quali la prima fu eseguita, come si è detto, subito dopo l'arrivo dei pendoli da Padova.

Osservazioni gravimetriche a Palermo, 1905.

Data civile	Pend.	*c*	*t*	*b*	*s*	Data civile	Pend.	*c*	*t*	*b*	*s*
Luglio		s	o	mm	s	Luglio		s	o	mm	s
24,388	116	38,8895	26,63	758,50	0,5062950	25,390	116	38,9023	26,17	755,80	0,5062941
24,429	117	35,1278	26,62	—	69990	25,423	117	35,1286	26,64	—	70011
24,463	118	34,1480	26,41	—	72129	25,452	118	34,1480	26,70	—	72113
24,511	119	34,2615	26,35	758,30	71879	25,482	119	34,2764	26,80	755,90	71824
24,636	119	34,2883	26,35	758,60	71821	25,635	119	34,2718	26,55	755,90	71847
24,671	118	34,1433	26,70	—	72124	25,665	118	34,1375	26.55	—	72144
24,701	117	35,1162	26,72	—	70045	25,724	116	38,8706	26,59	—	70048
24,730	116	38,8792	26,52	757,40	62952	25,751	117	35,1112	26,67	755,70	62972
Settemb.						Settemb.					
—	116	—	—	—	—	9,380	116	39,2522	24,97	762,50	0,5062941
—	117	—	—	—	—	9,415	117	35,4265	25,12	—	70000
8,485	118	34,4128	25,80	763,30	0,5072108	9,445	118	34,4217	25,40	—	72106
8,612	119	34,5331	25,78	762,50	71834	9,476	119	34,5440	25,57	762,50	71834
8,645	116	39,2207	26,01	—	62946	9,626	119	34,5447	25,57	762,10	71833
8,679	117	35,4019	26,06	—	70008	9,659	118	34,4102	25,80	—	72113
8,712	118	34,4035	26,09	—	72115	9,695	117	35,4042	25,83	—	70013
8.743	119	34,5283	26,08	762,50	71846	9,725	116	39,2158	25,83	761,80	62961

Le durate medie di oscillazione, sono dunque, per ciascun pendolo:

1905	116	117	118	119
	s	s	s	s
Luglio	0,5062956	0,5070023	0,5072128	0,5071843
Settembre	62949	70007	72110	71837
Diff.	+ 7	+ 16	+ 18	+ 6

Non è verosimile che in un mese di tempo all'incirca, i pendoli abbiano subite sensibili alterazioni di volume, e quel ch'è più, quasi nella stessa misura; per il che stimo più prudente ascrivere le piccole differenze sopra indicate, ad errori residui non determinabili, come flessioni possibili del supposto, attrito su di questo, irregolarità accidentale di andamento dell'orologio delle coincidenze, ecc. Si potranno, quindi, assumere come valori di oscillazione dei quattro pendoli, le medie dei valori precedenti; e avremo:

116	117	118	119
s 0,5062952	s 0,5070015	s 0,5072119	s 0,5071840

A provare il grado di esattezza di questi risultati, vale — in quanto si astragga da errori sistematici affettanti ugualmente tutti e quattro i pendoli — il metodo da me sempre adoperato (1), fondato sull'uguaglianza dei rapporti dei valori delle oscillazioni relative ad uno stesso pendolo, in due luoghi diversi. Costruendo i residui tra Padova e Palermo (2), abbiamo, indicandoli con w, ed esprimendoli in unità della 7ª decimale del secondo siderale:

$$w_1 = +1{,}2 \qquad w_2 = -5{,}4 \qquad w_3 = +1{,}2$$

e di qui si avrebbero i coefficienti intermediari

$$V_1 = v_1 = +1{,}2 \qquad V_2 = v_2 = -6{,}0 \qquad V_3 = v_3 = +2{,}6$$

e infine le correzioni dei valori oscillatori dei pendoli: e cioè, sempre in unità della 7ª decimale:

$$\delta_{1,1} = +0{,}7 \qquad \delta_{2,1} = +1{,}9 \qquad \delta_{3,1} = -4{,}6 \qquad \delta_{4,1} = +1{,}9$$

per Palermo: e

$$\delta_{2,1} = -0{,}7 \qquad \delta_{2,2} = -1{,}9 \qquad \delta_{3,2} = +4{,}6 \qquad \delta_{4,2} = -1{,}9$$

Le oscillazioni compensate sono, perciò:

	116	117	118	119
Palermo	s 0,5062953	s 0,5070017	s 0,5072114	s 0,5071842
Padova	0,5061427	0,5068490	0,5070586	0,5070313

(1) Venturi, *Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre*, N. Cimento, 1800.

(2) Venturi, Ibid, pag. 4.

Da una qualunque di queste coppie, si ricava la gravità a Palermo da quella di Padova: e viene

$$g_P = 980^{cm},086.3 \pm 0^{cm},002.5$$

poichè l'errore medio di una oscillazione compensata risultò (1)

$$E = 3,56 \times 10^{-7}.$$

Questo risultato mostra che la prima determinazione di gravità a Palermo nel 1899 era soddisfacentemente riuscita ad onta dei sei mesi circa che passarono fra la campionatura a Vienna e le operazioni a Palermo. Si ha dunque, riunendo:

Gravità di Palermo (da Padova): $980^{cm},086 \pm 0^{cm},002$

» » (da Vienna): $980^{cm},090 \pm 0^{cm},005$.

Si potrà quindi assumere la media ponderata di queste due determinazioni, e stabilire come valore della

Gravità a Palermo (Martorana) = $980^{cm},086.6 \pm 0^{cm},004$.

Riferisco ora sul riattacco avvenuto a Milazzo, fra le misure del professore Riccò e le mie. Il luogo di operazione e la data furono già descritti sopra; aggiungerò che il tempo fu determinato non più col grande Universale usato nella specola geodetica di Palermo, ma col solito ottimo Universale trasportabile Starke-Salmoiraghi, che ha servito in questa e nelle altre campagne. La gravità determinata a Milazzo dal prof. Riccò con un apparato austriaco risultò:

$$g = 980^{cm},143.$$

A Palermo, le due abituali determinazioni d'andata e di ritorno, ebbero luogo nei giorni 23-25 luglio e 4-6 settembre 1906, in tutto nello stesso modo sopra descritto. Riporto qui i due quadri degli stati di Hawelk, e delle oscillazioni pendolari.

Stati di Hawelk ed andamenti orarî, Palermo 1906.

Data siderale	Determinazione A		Determinazione B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.	Stato assoluto	And. or.	
Luglio					
23,638	$+12^h18^m21^s,50 \pm 0,13$	$-0^s,273$	$+12^h18^m21^s,00 \pm 0,14$	$-0^s,299$	$-0^s,286$
24,637	14,96		13,85		
25,652	09,17 ± 0,10	− 0.239	08,01 ± 0,11	− 0,240	− 0,240
Settembre					
4,748	$+13^h49^m58^s,38 \pm 0,07$	$-0^s,743$	$+13^h49^m58^s,59 \pm 0,11$	$-0^s,757$	$-0^s,750$
5,762	40,30		40,16		
6,762	22,36 ± 0,08	− 0,747	22,45 ± 0,22	− 0.738	− 0,743

(1) Venturi, *Sulla compensazione, ecc.*, pagg. 13-14.

Gli errori medî di ciascun andamento orario complessivo, risultano

per luglio: $\pm 0^s,0025$; per settembre: $\pm 0^s,0029$

corrispondenti agli errori medî dei rispettivi andamenti medî diurni, rappresentati da:

per luglio: $\pm 0^s,060$; per settembre: $\pm 0^s069$.

Osservazioni gravimetriche a Palermo, 1906.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio		s	o	mm	s	Luglio		s	o	mm	s
24,396	116	38,8931	25,11	757,70	0,5062951	25,382	116	38,8923	25,39	756,27	0,5062990
24,427	117	35,1247	25,31	—	70028	25,413	117	35,1270	25,55	—	70077
24,459	118	34,1490	25,47	—	72103	25,440	118	34,1519	25,67	—	72163
24,487	119	34,2733	25,54	758,20	71834	25,469	119	34,2773	25,83	756,30	71879
24,628	119	34,2797	25,86	756,20	71805	25,668	119	34,2789	26,00	756,30	71867
24,658	118	34,1443	26,00	—	72099	25,694	118	34,1485	26,18	—	72146
24,687	117	35,1199	26,01	—	70017	25,717	117	35,1237	26,17	—	70054
24,718	116	38,8827	26,03	756,50	62925	25,743	116	38,8939	26,20	756,00	62961
Settemb.						Settemb.					
5,381	116	38,5484	23,71	764,00	62957	6,378	116	38,5377	23,77	763,80	62976
5,418	117	34,8290	24,05	—	70061	6,410	117	34,8332	24,02	—	70052
5,447	118	33,8710	24,27	—	72133	6,439	118	33,8738	24,27	—	72131
5,475	119	33,9902	24,43	764,25	71864	6,468	119	33,9903	24,46	764,25	71866
5,637	119	33,9915	24,59	763,40	71851	6,634	119	33,9848	24,83	763,40	71834
5,669	118	33,8545	24,87	—	72146	6,662	118	33,8534	24,98	—	72143
5,701	117	34,8136	24,97	—	70045	6,690	117	34,8140	25,05	—	70042
5,732	116	38,5015	25,03	763,45	62973	6,718	116	38,5072	25,03	763,25	62964

Le durate medie di oscillazione sono dunque, per ciascun pendolo:

1906	116	117	118	119
	s	s	s	s
Luglio	0,5062957	0,5070044	0,5072128	0,5071846
Settembre	2966	0050	2131	1854
Diff.	— 9	— 6	— 10	— 8

Possiamo adunque, per le ragioni sopra allegate, assumere come valori definitivi delle durate di oscillazione a Palermo 1906, le medie dei risultati precedenti: e avremo:

116	117	118	119
s	s	s	s
0,5062961	0,5070047	0,5072133	0,5071850

La posizione di Milazzo è

Latitudine = 38°.13′.10″. Longitudine da Greenwich = 15°.14′.45″.
Altitudine m. 4.

Seguono gli stati del pendolo Hawelk a Milazzo.

Stati di Halwelk ed andamenti orarî, Milazzo 1906.

Data siderale	Determinazione A		Determinazione B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.	Stato assoluto	And. or.	
Agosto	h m s s	s	h m s s	s	s
20,874	+ 1.18.09,43 ± 0,07	— 0,272	+ 1.18.09,25 ± 0,12	— 0,264	— 0,268
21,874	02,88		02,92		
22,874	55.49 ± 0,14	— 0,308	56,20 ± 0,13	— 0,280	— 0,294

Quindi l'error medio dell'andamento orario complessivo pei due giorni è $\pm 0^s,0025$ corrispondente ad un errore medio sull'andamento medio diurno di $\pm 0^s,060$, come a Palermo.

Le osservazioni pendolari sono riferite nel seguente quadro:

Osservazioni gravimetriche a Milazzo, 1906.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Agosto		s	o	mm	s	Agosto		s	o	mm	s
21,407	116	38,9978	24,86	762,80	0,5062809	22,408	116	38,9860	24,82	763,90	0,5062793
21,440	117	35,2082	25,12	—	69887	22,444	117	35,1987	24,98	—	69874
21,469	118	34,2213	25,31	—	71985	22,471	118	34,2190	25,12	—	71961
21,498	119	34,3372	25,51	763,00	71721	22,501	119	34,3392	25,30	764,10	71688
21,646	119	34,3512	25,79	763,10	71675	22,661	119	34,3442	25,54	764,30	71665
21,675	118	34,2258	25,60	—	71961	22,691	118	34,2106	25,57	—	71956
21,705	117	35,1966	25,45	—	69895	22,720	117	35,1892	25,49	—	69869
21,734	116	38,9810	25,28	763,10	62817	22,750	116	38,9628	25,37	764,30	62806

Le durate medie di oscillazione, son dunque, per ciascun pendolo:

116	117	118	119
s	s	s	s
0,5062806	0,5069869	0,5071956	0,5071665

Per controllo e compensazione insieme, sottoponiamo ora, questi risultati e quelli di Palermo 1906, sopra riportati, al solito metodo usato sopra fra Padova e Palermo 1905.

I residui sono, in unità della 7ª decimale del secondo siderale:

$$w_1 = -6{,}2 \qquad w_2 = -6{,}5 \qquad w_3 = -4{,}1$$

vale a dire, come i precedenti, assolutamente minimi. Comunque, proseguendo nel metodo, si troveranno i coefficienti intermedî, sempre nelle stesse unità:

$$v_1 = V_1 = -6{,}20 \qquad v_2 = V_2 = -3{,}40 \qquad v_3 = V_3 = +0{,}13$$

e di qui le correzioni da farsi ai valori delle oscillazioni, nella 7ª decimale:

Per Palermo: $\delta_{116} = +4{,}1 \quad \delta_{117} = -1{,}7 \quad \delta_{118} = -2{,}4 \quad \delta_{119} = 0{,}0$
Per Milazzo: $\delta_{116} = -4{,}1 \quad \delta_{117} = +1{,}7 \quad \delta_{118} = +2{,}4 \quad \delta_{119} = 0{,}0.$

Cosicchè, le oscillazioni corrette saranno

	116	117	118	119
Per Palermo	^{s} 0,5062965	^{s} 0,5070045	^{s} 0,5072131	^{s} 0,5071850
Per Milazzo	62802	69883	71968	71687

Da uno qualunque di questi rapporti, e col valore più sopra registrato della gravità a Palermo, avremo la gravità a Milazzo (Cantina sperimentale):

$$g_v = 980{,}149.8 \ ^{cm}$$

Il prof. Riccò dà $g_r = 980{,}143.0$

Differenza: $\text{Diff.} = +0{,}006.8$

che può dirsi un ottimo risultato di verifica e di collegamento, fra le operazioni orientali e occidentali dell'Isola. Quanto all'errore medio delle precedenti determinazioni Milazzo-Palermo, riportate nei quadri precedenti, col solito metodo si trova: prima l'errore medio unitario,

$$\varepsilon = 4{,}25 \times 10^{-7};$$

indi l'errore medio delle risultanze

$$E = 3{,}35 \times 10^{-7};$$

e, infine, l'errore medio sul valore della gravità a Milazzo, che detto M_g, sarà:

$$M_g = \pm 0^{cm},0018.$$

Onde la gravità a Milazzo sarà, secondo le recenti mie determinazioni:

$$g_m = \mathbf{980^{cm},149.8 \pm 0^{cm},001.8}.$$

***

Per quanto, in base alle condizioni assolute a cui debbono soddisfare le durate di oscillazione dei pendoli, e che noi abbiamo trovate soddisfatte a meno di trascurabili residui, si possa essere sicuri della regolarità delle operazioni, pure non è senza interesse dare un'altra forma alla prova, considerando in ogni stazione, il valore del pendolo medio ideale, e cercando gli scostamenti fra esso e i valori dei singoli pendoli a cui si riferisce: questi scostamenti dovranno variare col pendolo considerato, ma non da stazione a stazione, a meno di piccole quantità, che dànno la misura dell'esattezza. Esprimendo gli scostamenti in unità della 7ª decimale, abbiamo:

STAZIONI	Pendolo medio	Scostamenti dal medio				Medio scostam.
		116	117	118	119	
Padova	s 0,5067704	6276	788	2877	2611	3138
Pal. Luglio 1905	9237	81	86	91	06	3141
Pal. Sett. 1905	9226	77	81	84	11	3138
Pal. Luglio 1906	9244	87	99	84	02	3143
Pal. Sett. 1906	9252	86	98	86	02	3143
Milazzo	9085	79	96	81	02	3140

che mostrano una ottima regolarità.

Sarà ancora utile, sulla questione della deformazione dei pendoli, riportare tutti i valori di oscillazione dei quattro pendoli usati, nei diversi anni nei quali oscillarono a Palermo.

DATA	116	117	118	119	Pendolo medio
1899 Luglio	s 0,5062974	s 0,5070071	s 0,5072195	s 0,5071922	s 0,5069290
1900 Sett.	954	061	157	875	62
1901 Agos.	982	105	193	916	99
1904 Luglio	922	047	126	849	36
1904 Sett.	925	055	129	844	38
1905 Luglio	956	023	128	843	38
1905 Sett.	949	007	110	837	26
1906 Luglio	957	044	128	846	44
1906 Sett.	966	050	138	854	52

L'andamento del pendolo medio ideale, sintetizzante i valori oscillatori dei quattro pendoli reali, mostra una quasi stazionarietà nel biennio 1899-1901;

e dopo la sosta dei tre anni 1901-4, apparisce un'altra quasi stazionarietà nel biennio 1904-6; ma questi ultimi valori sono sensibilmente inferiori a quelli del primo biennio. Pur non ammettendo che le intere differenze fra determinazione e determinazione sieno da ascriversi a deformazione del metallo dei pendoli (essendovi sempre a temere errori residuali o nel tempo, o nella flessione del supporto, o nell'attrito su di questo, ecc.) pure si deve riconoscere, fra l'andamento dei due bienni una netta diversità, ed ammettere che, sebbene con lentezza, abbia effettivamente avuto luogo una contrazione del metallo da cui i pendoli son costituiti, non tanto nei primi due anni, quanto nei cinque ultimi; contrazione che dalle ultime misure sembra accenni a cessare.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* Nota del Corrispondente F. Enriques.

La Nota, che mi onoro di presentare all'Accademia, porta un primo contributo al problema di determinare tutte le superficie algebriche che ammettono una trasformazione birazionale non periodica, e quindi una serie discontinua di trasformazioni. La possibilità di superficie siffatte, che non posseggano un gruppo continuo di trasformazioni, era conosciuta per gli esempii del sig. Humbert (superficie di Kummer) e del sig. Painlevè, ai quali ho aggiunto recentemente l'esempio delle superficie di genere $p_a = p_g = 0$ coi plurigeneri $P_2 = 1$, $P_3 = 0$.

Qui si dimostra che *le superficie con una trasformazione non periodica* (non possedenti un gruppo continuo di trasformazioni) *contengono sempre un fascio di curve ellittiche, all'infuori del caso* $p_a = P_2 = 1$. Questo caso sembra dar luogo ad una *vera eccezione* al teorema; infatti il sig. Fano mi comunica che una superficie del 4° ordine F_4, contenenente una sestica di genere due, ammette una serie discontinua di trasformazioni in sè, e pare che la suddetta F_4 non possieda in generale fasci di curve ellittiche.

A prescindere dalle superficie coi generi 1, il teorema sopra enunciato trae il suo interesse da ciò, che, sotto alcune condizioni complementari, esso è invertibile, di guisachè si può dire che *le superficie con un fascio di curve ellittiche ammettono in generale gruppi discontinui di trasformazioni in sè stesse.*

Un'analisi approfondita della questione permetterà di porre il resultato qui ottenuto sotto una forma più notevole. Infatti (lasciando sempre da parte il caso $p_a = P_2 = 1$) si potranno esprimere le condizioni perchè una superficie possegga una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasforma-

zioni birazionali, scrivendo che il genere lineare $p^{(1)} = 1$ ($p_a \geq 0$ $P_2 > 0$), e che il numero degli *integrali doppi di 2ª specie* soddisfa ad una certa diseguaglianza.

Ma riservo questo teorema (che esige ancora qualche sviluppo) ad un'altra comunicazione.

1. Sia F una superficie algebrica la quale ammetta una trasformazione birazionale non periodica, ma non un gruppo continuo di trasformazioni in sè stessa. Anzitutto sarà il suo genere aritmetico

$$p_a \geq 0,$$

ed il suo bigenere

$$P_2 > 0 \qquad (P_2 \geq p_a);$$

infatti una superficie per cui $p_a = P_2 = 0$ è razionale (Castelnuovo), ed una superficie per cui $p_a < 0$ è riferibile ad una rigata, oppure è ellittica o iperellittica (Enriques), cioè tutte queste superficie posseggono gruppi continui di trasformazioni.

S'indichi con $p^{(1)}$ il genere lineare (virtuale) di F; il bigenere P_2, il trigenere P_3 ecc. soddisferanno rispettivamente alle diseguaglianze

$$\begin{aligned} P_2 &\geq p_a + p^{(1)} \\ P_3 &\geq p_a + 3p^{(1)} - 2 \\ P_4 &\geq p_a + 6p^{(1)} - 5 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Quindi, se $p^{(1)} > 1$ e $p_a \geq 0$, si avranno su F almeno ∞^3 curve tricanoniche ecc.; ed è facile vedere che queste, a prescindere tutt'al più da parti fisse, saranno irriducibili, per modo che si potrà costruire una superficie φ, trasformata di F appartenente ad un certo spazio S_r, avente come sezioni iperpiane curve pluricanoniche.

Ora se F ammette trasformazioni birazionali in sè, queste si rispecchiano in trasformazioni proiettive di φ. Ma, com'è noto, una superficie che ammetta una trasformazione proiettiva non periodica, ammette tutto un gruppo continuo di trasformazioni proiettive, ed è razionale o rigata (Enriques-Fano). Ciò non potendo accadere per la φ, si conclude intanto che *il genere lineare di* F *vale*

$$p^{(1)} = 1.$$

2. Ora, lasciando da parte l'ipotesi che la F possegga trasformazioni in sè, vogliamo stabilire un teorema generale sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$, per cui $p_a \geq 0$, $P_2 > 0$.

Designando con $p_g (= P_1)$ il genere geometrico, si possono distinguere i seguenti casi:

1) $$p^{(1)} = 1, p_g > 1.$$

Allora la superficie F contiene un fascio di curve ellittiche, costituito dalle curve canoniche o delle loro componenti, se quelle sono riducibili.

2) $$p^{(1)} = 1 , p_g = p_a = 1 .$$

Qui il bigenere P_2 può avere i valori

$$P_2 = 1 \quad o \quad P_2 > 1 .$$

Se $P_2 = 1$ la superficie ha tutti i plurigeneri uguali ad 1; le curve pluricanoniche hanno l'ordine 0; ogni sistema lineare puro di genere π su F ha il grado $n = 2\pi - 2$. Il primo esempio di tali superficie è dato dalla superficie del 4° ordine che non contiene in generale fasci di curve ellittiche.

Se $P_2 > 1$ si ha su F un fascio di curve ellittiche bicanoniche, o componenti delle curve bicanoniche.

3) $$p^{(1)} = 1 , p_g = p_a = 0 , P_2 > 0 .$$

Può aversi

$$P_2 = 1 \quad o \quad P_2 > 1 .$$

Se $P_2 = 1$ la curva bicanonica può avere l'ordine 0 (essendo $P_3 = P_5 = \cdots = 0$ $P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1$), oppure l'ordine > 0 (essendo $P_3 > 0 , P_6 > 1$); ed in ambi i casi la F possiede fasci di curve ellittiche (1).

Se $P_2 > 1$ le curve bicanoniche, o le loro componenti, formano su F un fascio di curve ellittiche.

4) $$p^{(1)} = 1 , p_a = 0 , p_g = 1 .$$

Essendo l'irregolarità

$$p_g - p_a = 1$$

la superficie possiede un integrale semplice di 1ª specie con due periodi e quindi un fascio ellittico di curve C, di grado 0 e di un certo genere π (> 0). Essa possiede poi una curva canonica K ellittica secante in $2\pi - 2$ punti ogni curva C.

Vogliamo dimostrare che, dato possa essere $\pi > 1$, sarà il bigenere $P_2 > 1$, e quindi si avrà su F un fascio di curve ellittiche costituito dalle curve bicanoniche o dalle componenti di queste.

Pongasi che sia $\pi > 1$ e $P_2 = 1$; facciamo vedere che si arriva ad un assurdo.

Si costruisca il sistema lineare $|C''|$ secondo aggiunto ad una curva C del fascio; esso ha la dimensione $3\pi - 3$ (perchè il primo aggiunto $|C'| = |C + K|$ ha il genere $3\pi - 2$), e, stante l'ipotesi $P_2 = 1$, sega sulla C la serie bicanonica completa $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$.

(1) Cfr. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*. Memorie della Società Italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

Ora designando con $\bar{C}$ un'altra curva qualsiasi del fascio ellittico dato su F, il sistema

$$|C'' + \bar{C} - C| = \bar{C}''|$$

è il secondo aggiunto a $\bar{C}$. Al variare di $\bar{C}$ tutti questi sistemi lineari formano un sistema continuo non lineare

$$\{C''\},$$

di dimensione $3\pi - 2$, le cui curve segano su C gruppi della anzidetta serie bicanonica $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$. Pertanto dovranno esistere ∞' curve residue di C rispetto a $\{C''\}$, una delle quali è la curva bicanonica di F. Queste curve saranno, come la bicanonica, di genere 1, e comporranno un fascio ellittico. Ma tale conclusione è incompatibile coll'ipotesi $p_g = 1$, perchè a questo secondo fascio ellittico corrisponderà un secondo integrale semplice di 1ª specie di F, ciò che porta $p_g - p_a > 1$.

Raccogliendo i resultati dell'analisi precedente possiamo enunciare la conclusione:

Una superficie ($p_a \geq 0$, $P_2 > 0$) *di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ *contiene sempre un fascio* (*razionale o irrazionale*) *di curve ellittiche*; *fa eccezione il caso delle superficie con tutti i generi* 1 ($p_a = P_2 = 1$).

3. In base ai nn. 1, 2, ogni superficie che ammetta una trasformazione generante una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali in sè stessa, possiede un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi uguali ad 1.

Si tratta ora d'invertire, fin dove è possibile, questo resultato.

Sia F una superficie contenente un fascio di curve ellittiche C; e supponga si che vi siano due curve K_1, K_2 secanti le C in uno stesso numero m di punti e secondo gruppi G'_m, G''_m i cui multipli non siano equivalenti.

Sopra una C generica consideriamo l'integrale ellittico di 1ª specie I, coi periodi ϖ, ϖ'; siano a_1, a_2 rispettivamente le somme dei valori di I nei punti dei due gruppi G_m, G'_m. Allora si può definire razionalmente una trasformazione birazionale della curva C in sè stessa, ponendo

$$I' \equiv I + a_1 - a_2.$$

Questa trasformazione non è periodica, poichè si avrebbe altrimenti

$$r(a_1 - a_2) \equiv 0 \pmod{\varpi, \varpi'}.$$

Al variare di C nel fascio si ha una trasformazione birazionale della superficie F, le cui potenze formano un gruppo discontinuo.

È chiaro che se le curve K_1 K_2 segassero le C in un numero diverso di punti, p. es. in m_1, m_2 punti rispett. basterebbe sostituire ad esse due mul-

tipli convenienti, p. es. $m_2 K_1$, $m_1 K_2$, e si otterrebbe sempre una trasformazione non periodica di F, semprechè non vi sia equivalenza fra due multipli qualsiasi dei gruppi segati da K_1 , K_2 sulle C.

Si può dunque affermare che:

Se una superficie algebrica contiene un fascio di curve ellittiche C, *e due curve secanti sulle* C *dei gruppi i cui multipli non sono equivalenti, essa ammette una trasformazione non periodica e quindi una serie discontinua di trasformazioni birazionali, che lasciano ferme le* C.

Questo caso si può considerare come il *caso generale* delle superficie con un fascio di curve ellittiche, quando le suddette superficie si definiscano come luogo di curve ellittiche, appoggiantisi, in un certo numero di punti, a delle linee direttrici.

Aggiungasi infine l'osservazione che se una superficie contiene due fasci di curve ellittiche, mutate in sè rispettivamente da due trasformazioni non periodiche, moltiplicando queste trasformazioni si otterrà in generale un gruppo discontinuo che non ammetterà fasci invarianti di curve ellittiche.

Matematica. — *Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali.* Nota del Corrispondente G. Morera.

I matematici inglesi sogliono oggidì, sul modello della trattazione svolta nel classico « Treatise on natural Philosophy » di Thomson e Tait (vedi Appendice B, pag. 171 della I parte, 2ª edizione), basare la teoria delle armoniche sferiche sulla considerazione delle derivate dell'inversa del raggio vettore; è per es. questo il punto di partenza adottato in argomento nel celebre « Treatise on Electricity and Magnetism » del Maxwell (Chapter IX, vol. I, pag. 194 della 3ª edizione).

Con un procedimento simile si può trattare con vantaggio la teoria delle armoniche ellissoidali, come ho mostrato nella mia Memoria: *Sulla attrazione degli ellissoidi* (Mem. della R. Acc. di Torino, vol. LV, ser. II) e nella mia Nota: *Sull'attrazione degli strati ellissoidali* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XLI).

Il problema di Dirichlet per lo spazio interno all'ellissoide fu risoluto come è ben noto da Lamé coll'uso delle coordinate ellittiche, che lo condusse alla memorabile scoperta delle soluzioni semplici dell'equazione di Laplace, formate dal prodotto di tre identiche funzioni di ciascuna coordinata ellittica, colle quali soluzioni semplici mercè una serie infinita si esprime la soluzione cercata.

La scoperta di Lamé fu notevolmente perfezionata da Liouville, sia coll'osservare che i prodotti di Lamé sull'ellissoide si convertono con un cambiamento di variabili in funzioni sferiche, il che basta ad assicurare la

sviluppabilità in serie di tali prodotti di una funzione arbitrariamente data sull'ellissoide, sia nel considerare la seconda soluzione dell'equazione differenziale di Lamé per il fattore dipendente dal parametro degli ellissoidi omofocali. Questa soluzione, moltiplicata per gli altri due fattori considerati da Lamé, somministra infatti un'altra soluzione semplice dell'equazione di Laplace, che è armonica all'esterno dell'ellissoide; con queste armoniche elementari di seconda specie, mercè una serie infinita, si risolve per lo spazio esterno dell'ellissoide il problema di Dirichlet. Allo stesso risultato era pure giunto, pressochè contemporaneamente Heine (1).

Ma se da un canto i prodotti di Lamé di prima e seconda specie offrono un procedimento teoricamente soddisfacente ed elegantissimo per risolvere il problema di Dirichlet, rispettivamente all'interno ed all'esterno dell'ellissoide, dall'altro la legge della loro formazione è così involuta che malagevole ne riesce l'impiego nella risoluzione di problemi concreti.

Per ciò mi è sembrato plausibile il tentativo di sostituire ai prodotti di Lamé altre armoniche elementari la cui legge di formazione fosse esplicita e semplice.

Lo scopo è stato da me raggiunto considerando le derivate n^{me} della funzione potenziale U_n di un corpo ellissoidico la cui densità è:

$$n\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1},$$

ove al solito con a, b, c sono indicati i tre semiassi dell'ellissoide.

Più precisamente nel secondo dei miei lavori sovra ricordati ho stabilito i seguenti teoremi.

Teorema A. *Se* $Q_n(x, y, z)$ *indica un polinomio armonico, omogeneo, del grado* n, *la funzione*

$$Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)U_n$$

è armonica all'interno ed all'esterno dell'ellissoide, e dà la funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità:

$$h_n = -(-2)^{n-1}\cdot n!\,P\cdot Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

ove P *designa la distanza fra il centro ed il piano tangente all'ellissoide nel punto* (x, y, z).

(1) Cfr. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen* (2ª edizione).

Teorema B. *Per ogni numero intero n, scelti $2n+1$ polinomi armonici, omogenei, di grado n:*

$$Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, \ldots, Q_n^{(2n)},$$

fra di loro linearmente indipendenti, si avranno in corrispondenza $2n+1$ armoniche ellissoidali indipendenti dell'n^{mo} ordine:

$$U_n^{(i)} = Q_n^{(i)}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ b\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ c\frac{\partial}{\partial z}\right)U_n \quad (i=0,1\ldots,2n),$$

ed ogni armonica entro e fuori dell'ellissoide si può rappresentare colla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2n}\alpha_n^{(i)}\,U_n^{(i)},$$

ove le α indicano delle costanti.

Teorema C. *Sia f una funzione arbitrariamente data sull'ellissoide* (1); *si ponga:*

$$\left.\begin{aligned} h_n^{(i)} &= -(-2)^{n-1}\,n!\,P\,.\,Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)\\ A_n^{(i,j)} &= \int U_n^{(i)}\,h_n^{(j)}\,dS = \int U_n^{(j)}\,h_n^{(i)}\,dS = A_n^{(j,i)}\end{aligned}\right\}(i,j=0,1,\ldots,2n),$$

ove dS indica l'elemento di superficie dell'ellissoide e le integrazioni vanno estese a tutto l'ellissoide; allora i coefficienti $\alpha_n^{(0)}\ldots\alpha_n^{(2n)}$ dello sviluppo dell'armonica che soll'ellissoide diviene uguale ad f si ottengono dalle $2n+1$ equazioni lineari:

$$\sum_{j=0}^{2n}\alpha_n^{(j)}\,A_n^{(i,j)} = \int f\,h_n^{(i)}\,dS \qquad (i=0,1,2,\ldots,2n),$$

il cui determinante è diverso da zero.

In particolare le funzioni $Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, \ldots, Q_n^{(2n)}$ si possono sempre scegliere in guisa che risultino nulle tutte le $A_n^{(ij)}$ per $i \neq j$, con la qual scelta l'indicato *processo d'integrazione dà isolatamente i coefficienti* α_n. Tale scelta dipende dalla riduzione a somma di quadrati di una forma quadratica a $2n+1$ variabili. Le funzioni di Lamé appartengono a questa particolare categoria delle nostre armoniche ellissoidali.

In questo breve lavoro, premesse alcune proposizioni sui polinomi armonici, dò una nuova e più diretta dimostrazione dei teoremi fondamentali A

(1) Le limitazioni di imporsi all'arbitrarietà della f sono quelle stesse che occorrono per dimostrare la sviluppabilità in serie di funzioni sferiche, da una funzione data sulla sfera.

e B. Quanto al teorema C rimando il lettore al § VIII della mia ricordata Nota inserita nel vol. XLI degli Atti della R. Acc. di Torino (pag. 538-541).

1. Stabiliamo anzitutto un lemma algebrico, che è utile nella teoria delle funzioni armoniche.

Se P_n *indica un polinomio omogeneo, a coefficienti reali, si possono determinare in un sol modo: a meno di fattori costanti il cui prodotto è l'unità n funzioni lineari reali* $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, *ed un altro polinomio reale* P_{n-2} *in guisa che risulti identicamente:*

$$(1) \qquad P_n(x, y, z) \equiv \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, P_{n-2}(x, y, z).$$

Interpretate x, y, z come coordinate omogenee di un punto nel piano, consideriamo le curve:

$$P_n(x, y, z) = 0 \quad , \quad P_2(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

le quali si intersecano in $2n$ punti imaginari due a due coniugati. Congiunta ciascuna intersezione colla propria coniugata avremo n rette reali:

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si ponga:

$$\pi_n = \prod_{i=0}^{n} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z),$$

e si consideri il fascio di curve:

$$P_n - \lambda \pi_n = 0,$$

il quale ha $2n$ punti base sulla conica: $P_2 = 0$.

Si determini λ in guisa che la corrispondente curva del fascio abbia a comune colla conica un altro punto fuori dei $2n$ anzidetti, la curva che così si ottiene si spezza nella conica ed in altra curva $P_{n-2} = 0$, sicchè detto λ_0 il parametro di tal curva avremo identicamente:

$$P_n - \lambda_0 \pi_n \equiv P_2 \cdot P_{n-2}.$$

Si osservi che λ_0 è necessariamente reale giacchè i punti sovra $P_2 = 0$ sono due a due imaginari coniugati. Con ciò è dimostrata l'identità (1).

Interpretiamo x, y, z come coordinate ortogonali di un punto dello spazio e diciamo h_i la direzione i cui coseni sono proporzionali ad $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$; se in (1) cambiamo x, y, z in $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ avremo:

$$(1') \qquad P_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv c \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} + P_{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \Delta_2,$$

ove c indica una costante e le n direzioni $h_1 \dots h_n$ si possono a coppie invertire.

Di qui scende, come corollario: *una qualsiasi operazione derivatoria d'ordine n da effettuarsi sopra una funzione armonica, a meno di un fattore costante, equivale ad n derivazioni secondo n determinate direzioni.*

In particolare, essendo com'è notissimo:

$$P_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

ove: $r = \sqrt{x^2 + y^2 = z^2}$ e Q_n indica un polinomio armonico omogeneo del grado n, risulta che, a meno di un fattore costante, qualunque polinomio armonico omogeneo del n^{mo} ordine è dato dalla formula:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial}{\partial h_2}\cdots\frac{\partial}{\partial h_n}\frac{1}{r} = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}.$$

2. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{1}{r} = -\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{r^3}, \quad Q_1 = -(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z),$$

dunque:

$$Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = -\frac{Q_1}{r^3}.$$

Del pari si trova subito:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial}{\partial h_2}\frac{1}{r} = \frac{3(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) r^2}{r^5};$$

$$Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = 3\frac{Q_2}{r^5},$$

e si dimostra ovviamente che sarà in generale:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = c_n\frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

ove c_n indica una costante.

Basta provare che se la relazione è vera per $n = m$ lo sarà pure per $n = m + 1$. Posto:

$$\frac{Q_{m+1}}{r^{2m+3}} = \frac{\partial}{\partial h_{m+1}}\frac{\partial}{\partial h_m}\cdots\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial h_{m+1}}\frac{Q_m}{r^{2m+1}}.$$

si ha subito:

$$Q_{m+1} = -(2m+1) Q_m \cdot (\alpha_{m+1} x + \beta_{m+1} y + \gamma_{m+1} z) + \frac{\partial Q_m}{\partial h_{m+1}} r^2,$$

dunque:

$$Q_{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=-(2m+2)\,c_m\frac{\partial}{\partial h_{m+1}}\frac{Q_m}{r^{2m+1}}=-(2m+1)\,c_m\,Q_{m+1};$$

sicchè si ha la formula generale:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\,1\,.\,2\,...\,(2n-1)\,\frac{Q_n(x\,,y\,.\,z)}{r^{2n+1}}\,.$$

3. Posto:

$$f_x=x_1^2+x_2^2+x_3^2\quad,\quad f_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\,,$$

come ho dimostrato nel § 2 della mia Memoria: *Sull'attrazione degli ellissoidi*, si ha identicamente:

$$\frac{1}{2^n\,.\,n!}\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n f_x^n=$$
$$=f_{xy}^n+c_{n-2}\,f_{xy}^{n-2}f_xf_y+c_{n-4}\,f_{yx}^{n-4}f_x^2f_y^2+\cdots$$

ove le c sono delle costanti numeriche.

Indicata col simbolo Δ_2 l'operazione $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, si trova immediatamente:

$$f_{xy}^{n-2}f_{y^2}=\frac{1}{n(n-1)}\Delta_2 f_{xy}^n\,,\quad f_{xy}^{n-4}f_y^2=\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\Delta_2\Delta_2 f_{xy}^n\,,\ldots$$

Orbene nella ricordata identità invece dei prodotti

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\,y_1^p\,y_2^q\,y_3^r\quad(p+q+r=n)\,,$$

si possono porre delle costanti qualunque $\alpha_{p,q,r}$; poniamo per questi prodotti rispettivamente i coefficienti delle $x_1^p\,x_2^q\,x_3^r$ in un polinomio armonico omogeneo del grado n: $Q_n(x_1,x_2,x_3)$. Allora f_{xy}^n diviene Q_n, e siccome $\Delta_2 Q_n=0$, scritto r^2 invece di $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ si ha:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)r^{2n}=2^n\,.\,n!\,Q_n(x_1\,,x_2\,,x_3).$$

A questa identità applichiamo s volte l'operazione Δ_2 si conclude:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)r^{2(n-s)}=0\qquad(s=1\,,2\,,3\,...).$$

Dunque se $Q_n(x_1, x_2, x_3)$ indica un polinomio armonico omogeneo del grado n^{mo}, posto $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ in luogo di x_1, x_2, x_3, si ha:

$$\begin{cases} Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\nu^n = 2^n \cdot n!\, Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \\ Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\nu^{n-s} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots) \\ \nu = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}. \end{cases}$$

4. La funzione potenziale del corpo ellissoidico di densità:

$$k = n\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}$$

è notoriamente:

$$U_n = \pi abc \int_{s_1}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{R(s)},$$

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}, \quad R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

ove s_0 indica lo zero, ovvero la maggior radice dell'equazione $\mu = 0$, secondochè il punto potenziato (x, y, z) è interno, ovvero esterno all'ellissoide.

Designando con $Q_n(x, x, z)$ un polinomio armonico, omogeneo del grado n^{mo}, e posto:

$$U'_n = \pi abc\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{R(s)}$$

si ha subito all'interno:

$$-\frac{\Delta_2 U'_n}{4\pi} = n\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)(1-\nu)^{n-1} = 0;$$

dunque U'_n *è la funzione potenziale di uno strato ellissoidale.*

La densità h_n di questo strato si calcola subito col teorema di Poisson e si trova facilmente, com'è spiegato al § 7 della mia Memoria:

$$h_n = -(-2)^{n-1} n!\, P \cdot Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Sovra l'ellissoide è lecito porre:

$$x = a \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \quad y = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \quad z = c\cos\theta$$

e le θ e ω si possono interpretare come coordinate curvilinee.

Il significato di queste coordinate ausiliarie è ovvio.

Si considerino gli ellissoidi omofocali al dato e le loro traiettorie ortogonali. Si imagini un punto P che a partire dall'ellissoide fondamentale percorra all'esterno una di queste traiettorie.

I tre semiassi dell'ellissoide omofocale passante per P sono: $\sqrt{a^2+s_0}$, $\sqrt{b^2+s_0}$, $\sqrt{c^2+s_0}$, ed i tre rapporti $\frac{x}{\sqrt{a^2+s_0}}, \frac{y}{\sqrt{b^2+s_0}}, \frac{z}{\sqrt{c^2+s_0}}$ al muoversi di P non mutano; sicchè, quando P lungo la traiettoria va all'infinito, si avrà:

$$\begin{cases} \lim \frac{x}{\sqrt{a^2+s_0}} = \lim \frac{x}{r} = \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \\ \lim \frac{y}{\sqrt{b^2+s_0}} = \lim \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \\ \lim \frac{z}{\sqrt{c^2+s_0}} = \lim \frac{z}{r} = \cos\omega, \end{cases}$$

cioè: θ e ω sono le coordinate sferiche della traccia di detta linea sulla sfera di raggio infinito.

L'espressione di h_n diviene:

$$h_n = (-1)^n 2^{n-1} \cdot n! \, \mathrm{P} \cdot \varphi_n(\theta, \omega),$$

ove φ_n designa la funzione sferica dell'ordine n corrispondente al polinomio armonico Q_n.

Sia data sull'ellissoide una distribuzione di *densità qualunque* che scriveremo sotto la forma: $h = \mathrm{P} \cdot \psi$. La ψ si può riguardare come una funzione di θ e ω, arbitrariamente data sulla sfera di raggio uno, e sviluppare in una serie di funzioni sferiche di questi argomenti:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots$$

Si assuma

$$\varphi_n = \frac{(-1)^n \cdot \psi_n}{2^{n-1} \cdot n!} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

e si considerino i corrispondenti polinomi armonici omogenei $Q_n(x, y, z)$, ottenuti dalle φ_n ponendo in $\varrho^n \varphi_n$:

$$\varrho \operatorname{sen}\theta \cos\omega = x \ , \ \varrho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega = y \ , \ \varrho \cos\omega = z.$$

Detta r la distanza fra l'elemento dS ed il punto x, y, z si ha:

$$U = \int \frac{h\,dS}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\psi_n \mathrm{P}\,dS}{r};$$

dunque *lo sviluppo della funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità h è*

$$U = U_0 + U_1' + U_2' + \cdots$$

ove

$$U_n' = \pi abc\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial x}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mu_n\, ds}{R(s)}\,.$$

Questa serie, ammessa ben inteso la sviluppabilità della ψ in serie di funzioni sferiche, converge uniformemente all'esterno ed all'interno dell'ellissoide. Con ciò è dimostrato il teorema B.

Se invece di dare la densità della distribuzione sull'ellissoide, dell'armonica U si prescrivono i valori su di questo, lo sviluppo della U nelle nostre armoniche ellissoidali è somministrato dal teorema C, del quale teorema stimo superfluo di qui ripetere la dimostrazione.

5. Il caso particolare in cui l'ellissoide divenga una sfera offre una facile verifica dei risultati ottenuti.

Assunto:

$$a = b = c = 1\,,$$

si ha:

$$\mu = 1 - \frac{r^2}{1+s}\,,\quad \int\frac{\mu^n\, ds}{R(s)} = -\frac{2}{r}\int\left(1-\frac{r^2}{1+s}\right)^n d\frac{r}{\sqrt{1+s}}\,,$$

sicchè posto

$$v = \frac{r}{\sqrt{1+s}}\,,$$

risulta:

$$\int\frac{\mu^n\, ds}{R(s)} = -\frac{2}{r}\left[v - n\frac{v^3}{3} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{v^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{v^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

All'esterno della sfera avremo:

$$U_{n,i} = \frac{2\pi}{r}\left[1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}\right] =$$

$$= \frac{2^{n+1}\,.\,n!}{1\,.\,3\,\ldots\,(2n+1)}\frac{\pi}{r}\,.$$

All'interno avremo invece:

$$U_{n,e} = 2\pi\left[1 - n\frac{r^2}{3} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{r^4}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{r^{2n}}{2n+1}\right];$$

e si verifica subito che:

$$\Delta_2\, U_{n,i} = -\,4n\pi(1-r^2)^{n-1} = -\,4\pi k\,.$$

Per mezzo delle formule dimostrate nei §§ 2 e 3 si trova immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} U'_{n,e} &= Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U_{n,i} = (-1)^n \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2n+1} \pi \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}} \\ U'_{n,i} &= Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U_{n,i} = (-1)^n \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2n+1} \pi Q_n(x, y, z) \end{aligned}\right\};$$

sicchè tanto all'interno quanto all'esterno della sfera si ha:

$$\Delta_2 U'_n = 0.$$

La densità dello stato sferico di funzione potenziale U'_n risulta per la nostra formula generale:

$$h_n = (-1)^n 2^{n-1} \cdot n! \, Q_n(\operatorname{sen}\theta \cos\omega, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \cos\omega),$$

ove ora θ e ω sono le coordinate polari del punto sulla sfera.

D'altra parte, posto:

$$\varphi_n = \frac{4\pi}{2n+1} h_n,$$

si ha com'è ben noto:

$$U'_{n,i} = r^n \varphi_n \quad , \quad U'_{n,e} = \frac{\varphi_n}{r^{n+1}},$$

formule che confermano quelle ottenute poc'anzi.

Astronomia. — *Osservazioni delle comete 1906 g ed h fatte all'equatoriale Steinheil dell'Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

Cometa 1906 g.

Fu scoperta da H. Thiele a Kopenhagen la notte 10-11 novembre. L'astro fu trovato al Collegio Romano dal dott. E. Bianchi la notte 11-12 novembre, e fu osservato come segue:

1906 Novembre 11	$14^h\,27^m\,46^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 19 53. 89	(9n.554)	(Bianchi).
δ » »	$+13°\,31'\,12''.5$	(0. 677)	
1906 Novembre 12	$15^h\,7^m\,57^s\,\frac{1}{2}$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 24 25. 16	(9n.488)	(Zappa)
δ » »	$+14°\,45'\,34''\,1$	(0. 652)	
1906 Novembre 14	$13^h\,33^m\,37^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 33 15. 79	(9n.624)	(Bianchi)
δ » »	$+17°\,9'\,58''.8$	(0. 683)	

1906 Novembre 22	$13^h\,53^m\,41^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	10 15 9. 76	(9^n.650)	(Zappa)
δ » »	$+27°\,59'\,43''.7$	(0. 583)	
1906 Novembre 25	$13^h\,17^m\,0^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	10 33 13. 20	(9^n.633)	(Millosevich)
δ » »	$+32°\,9'\,52''.2$	(0. 607)	
1906 Novembre 25	$13^h\,37^m\,48^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	10 33 18. 72	(9^n.620)	(Bianchi)
δ » »	$+32°\,11'\,7''.2$	(0. 573)	
1906 Novembre 29	$12^h\,31^m\,23^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	10 59 34. 56	(9^n.742)	(Zappa)
1906 Novembre 29	$12^h\,43^m\,19^s$	R. C. R.	
δ » »	$+37°\,36'\,1''.0$	(0. 640)	

La cometa, con piccole amplificazioni, apparve lucente con nucleo definito, il quale si affievolisce subito sotto medie amplificazioni, rimanendo un astro di luce diffusa più intensa verso il centro e abbracciante circa $1'\frac{1}{2}$.

Cometa 1906 h.

Fu scoperta fotograficamente la sera del 14 novembre a Taunton da Metcalf.

Fu da me trovata il 22 novembre. Nucleo di 12^{ma} gr. rotonda, testa = 1', nucleo dissimetrico. Debolissima.

1906 Novembre 22	$9^h\,38^m\,32^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	4 2 49. 24	(9^n.402)	(Millosevich)
δ » »	$-3°\,55'\,19''.3$	(0. 792)	
1906 Novembre 22	$10^h\,5^m\,6^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	4 2 48. 71	(9^n.320)	(Zappa)
δ » »	$-3°'55\,28''\,2$	(0. 794)	
1906 Novembre 23	$12^h\,19^m\,22^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	4 2 32. 13	(8. 677)	(Bianchi)
δ » »	$-4°\,6'\,34''.0$	(0. 799)	
1906 Novembre 25	$14^h\,36^m\,12^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	4 2 0. 12	(9. 473)	(Bianchi)
δ » »	$-4°\,26'\,1''.7$	(0. 792)	
1906 Novembre 26	$15^h\,37^m\,36^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	4 1 44. 28	(9. 576)	(Bianchi)
δ » »	$-4°\,34'\,37''.0$	(0. 785)	

Fisica. — *Sulle esperienze degli spari contro la grandine, eseguiti a Castelfranco Veneto negli anni 1902-1906.* Nota del Socio P. Blaserna.

Nell'anno 1902, il Ministero d'allora mi fece l'onore di nominarmi presidente della Commissione incaricata di studiare gli effetti grandinifughi degli spari. Si trattava di scegliere una zona battuta spesso da quel flagello e di vedere, se ed entro quali limiti si poteva sperare un rimedio contro i formidabili effetti della grandine.

Furono fatte varie offerte al Governo, di zone flagellate dalla grandine. La Commissione scelse quella di Castelfranco Veneto, la quale nei due precedenti anni aveva avuto molto a soffrire. Trattavasi di una zona di più che 6000 ettari di terreno, alla quale si potè largamente provvedere coi mezzi inscritti nel bilancio e con quelli offerti dal Consorzio locale.

Il programma della Commissione era molto semplice.

Si sceglieva una zona possibilmente battuta dalla grandine, la quale si dotava dei migliori cannoni grandinifughi che l'industria avesse creato; questi cannoni si collocavano alla distanza metà di quella indicata dai fautori degli spari, e si provvedeva agli spari medesimi colla maggiore larghezza possibile. Se nonostante questo insieme grandioso di mezzi non si fosse riusciti a scongiurare il funesto pericolo, voleva dire che l'efficacia degli spari non avrebbe potuto più ammettersi.

Fu così che si collocarono nella zona suddetta 200 cannoni costruiti sul miglior tipo esistente, fornito dalla casa C. Greinitz Neffen di Graz, dalla tromba di 4 metri e dalla carica di 180 grammi di polvere da mina. Più tardi, siccome la moda era venuta per i cannoni ad acetilene, furono collocati ancora 22 cannoni di questo tipo, forniti dalla casa Maggiore di Padova, dei quali uno addirittura gigante (tromba di 14 metri).

L'impianto dato dalla Commissione a questi esperimenti fu altamente lodato dalla Conferenza Internazionale di Graz per gli spari grandinifughi. Ma le esperienze dirette dal prof. Pochettino ed eseguite con un personale scelto e numeroso, non riuscirono pur troppo favorevoli agli spari medesimi. Come ebbi già a dichiarare alla Conferenza di Graz nel 1902 i terreni più battuti dalla grandine erano quelli protetti dai migliori cannoni; meno flagellati riuscirono i terreni protetti da cannoni di minor calibro e rimasero immuni le terre non protette. Era proprio il rovescio di ciò che si sarebbe potuto desiderare. Pur tuttavia, per non fermarsi ad un primo esperimento, gli spari si continuarono anche nel 1903 e nel 1904, ma l'esito negativo rimase lo stesso.

Intanto l'enorme entusiasmo col quale il paese aveva accolto l'idea degli spari era rapidamente scomparso e si tramutò in un vero sentimento di ostilità. Alla fine nel 1904 io potei dire, senza esagerazione, che ero il solo ancora che sparasse, mentre ero stato quasi il solo a dichiarare la nessuna fiducia negli spari che io avevo. La Camera dei Deputati si mostrò sempre più e più ritrosa a lasciar continuare queste esperienze; ma io devo particolarmente ringraziare il Ministero, per aver riconosciuto, che esperienze d'indole scientifica dovevano farsi con criterî più calmi e più sereni e dovevano condursi in modo esauriente, per non dover poi ritornare dopo pochi anni sulla medesima questione.

Ma dopo il 1904, sarebbe stato in verità esagerato il voler continuare sulla medesima via; il paese non ci seguiva più, e la sola Francia erasi ancora mantenuta in favore degli spari. Questa questione degli spari grandinifughi in fondo rassomiglia ad una grande ondata, che prese le mosse dalla Stiria austriaca, invase tutta l'alta Italia e poi andò a finire in Francia, ove perdura ancora, ma con sintomi evidenti di forte ribasso. Per noi la si potè considerare come una questione esaurita.

Ma all'infuori dei cannoni, cosidetti grandinifughi, sorsero altri congegni che meritavano un attento esame. Specialmente in Francia si magnificava molto l'effetto prodotto dai razzi. La Commissione si fece un dovere di esaminarli tutti, di qualunque provenienza fossero. Quasi tutti si mostrarono fin dal principio completamente inefficaci, come i razzi adoperati nei fuochi d'artificio. Essi non andavano al di là dei 200-300 metri di altezza, e non potevano avere evidentemente alcuna influenza sull'andamento delle nubi grandinifere. Ma la casa Aulagne di Monteux mise a nostra disposizione dei razzi perfettamente costruiti e che andavano fino all'altezza di 900-1200 metri. Si potevano così far scoppiare in mezzo alle nubi grandinifere: ma anche per essi l'effetto è stato zero.

Al loro effetto nullo potevasi però obbiettare, che era una piccola massa quella che scoppiava. Fu allora che io mi rivolsi al Ministero della Guerra, pregandolo di voler far studiare la formazione di una bomba di carta del peso di 5-10 chilogrammi e da lanciarsi a 1000 metri di altezza in mezzo alle nubi in parola. Il Ministero non credette di poter accogliere la mia proposta; ma esso imprestò alla Commissione uu cannone liscio, per il quale il sig. Marazzi, distinto pirotecnico di Roma, costruì delle bombe di 8 chilogrammi di peso e che potevansi comodamente lanciare fino ad 800 metri ed anche al di là.

Nell'anno corrente 1906 fu iniziata una campagna estremamente attiva, per esaminare anche questi ultimi congegni. Si spararono 250 razzi Aulagne e 60 bombe Marazzi. Ma l'effetto è stato nullo.

Le nubi, anche grandinifere, non sono altro che nebbie che non si risentono neppure dello scoppio di una bomba del peso di 8 chilogrammi.

Siamo così arrivati alla conclusione che anche questi ultimi mezzi escogitati per combattere il flagello della grandine non hanno alcuna efficacia. E coll'animo sereno e con completa convinzione sono stato in grado di proporre al Ministero di voler chiudere il periodo delle esperienze.

Ma non voglio e non posso lasciar passare questa occasione, senza ringraziare pubblicamente il mio assistente dott. Pochettino, il quale coadiuvato dal dott. Pacini ha diretto le esperienze stesse con molta fermezza, con molta intelligenza e con molta efficacia. Le relazioni, molto particolareggiate, sono pubblicate per conto del Ministero di Agricoltura.

Colgo in pari tempo questa occasione per ringraziare caldamente il Ministero dei mezzi posti a mia disposizione.

Il risultato finale di questa campagna grandinifuga, che è durata 5 anni, è interamente negativo; sarebbe certamente stato più piacevole il poter mettere al servizio del paese un congegno efficace contro uno dei grandi nemici dell'Agricoltura italiana; ma anche negativo com'è, questo risultato offre almeno la consolazione, che si può avvertire come su quella via non c'è nulla da sperare, e che dagli effetti di quel flagello conviene premunirsi con mezzi affatto diversi.

Matematica. — *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Nota del dott. Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio L. Bianchi.

Le serie che il Poincaré introdusse nelle sue celebri Memorie degli Acta Mathematica, sono forse il più potente mezzo (1) di dimostrazione dell'esistenza di funzioni automorfe di n variabili complesse $x_1\, x_2 \ldots x_n$: funzioni cioè che rimangono invarianti quando le x subiscono le trasformazioni g di un gruppo G propriamente discontinuo. Esse sono date dalla formola

$$(1) \qquad \sum \mathrm{R}(gx_i)\left[\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^m$$

dove con gx_i indichiamo le variabili trasformate delle x per l'operazione g, con $\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}$ il Jacobiano della trasformazione, con R una funzione delle x, e la sommatoria va estesa a tutte le operazioni di G. Però, perchè tale costruzione sia valida, occorre dimostrare che per una conveniente scelta di m ed R: 1° le serie (1) convergono; 2° non sono identicamente nulle ed anzi

(1) Anche nel caso di una sola variabile il metodo del Klein, che pure illumina così vivamente la teoria delle funzioni automorfe, non serve a dimostrare i teoremi di esistenza colla stessa generalità di quello del Poincaré: poichè non è ancora dimostrato che esso possa applicarsi ai gruppi il cui poligono fondamentale ha infiniti lati.

almeno due di esse non differiscono solo per un fattore costante. Tale dimostrazione fu fatta per molti casi particolari; mi propongo qui di dare un teorema generale per una classe di gruppi proiettivi che comprende tutte quelle già note.

1. Chiamate $x_i = \xi_i + i\eta_i$ le variabili indipendenti, indicherò le variabili trasformate per l'operazione g con $gx_i = x_i' = \xi_i^{(g)} + i\eta_i^{(g)}$. Indicherò con a_0 la quantità coniugata di a. Σ_{2n} sarà lo spazio lineare in cui sono coordinate cartesiane le ξ_i ed η_i: ove occorra mettere in evidenza che le ξ_i ed η_i sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di x_i indicherò Σ_{2n} con $(\Sigma)_n$. Σ_{2n-h} è un qualunque spazio lineare subordinato a $2n-h$ dimensioni: quando h sia pari $= 2k$ e le equazioni che determinano il Σ_{2n-2k} si possano scrivere come k equazioni lineari nelle x_i indicherò il Σ_{2n-2k} con $(\Sigma)_{n-k}$. Intenderò che i punti all'infinito formino un $(\Sigma)_{n-1}$ che indico con $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$; ciò non deve stupire se si ricorda che nel caso di una sola variabile complessa si intende che uno solo sia il punto all'∞; e che con una trasformazione lineare sulle variabili complesse si può fare in modo che un qualunque $(\Sigma)_{n-1}$ vada all'infinito.

2. Premesso ciò, si supponga che in un punto x di un campo fondamentale di G e nei punti equivalenti ad esso rispetto a G, la funzione $R(x_i)$ sia sempre finita e che anzi sia sempre minore in valore assoluto di una costante M: sarà dimostrata la convergenza assoluta di (1) appena lo sia quella della serie

$$\sum \left[\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right]^m. \tag{2}$$

Ed invero in tale ipotesi ogni termine di (1) è in modulo minore del corrispondente termine di (2) moltiplicato per M.

Ora è facile vedere che *appena sia soddisfatta la condizione:*

1°. *Si può descrivere una ipersfera* S *di raggio sufficientemente grande r tale che solo un numero finito di campi fondamentali abbiano punti fuori di* S;

la serie (2) *per* $m = 2$ *converge per ogni punto* X *interno ad un campo fondamentale, non equivalente ad un punto all'infinito rispetto a* G *e tale che*

2° *si può trovare un intorno* α *di* X *in cui il rapporto tra il massimo ed il minimo di* $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right|$ *nei punti di* α *è minore di una costante* ϱ *qualunque sia* g.

Basterà invero ripetere la prima dimostrazione del Poincaré. Infatti siccome X non è equivalente ad un punto all'infinito, esso non è neppure punto limite di tali punti, poichè questi riempiono (per la condizione 1ª) un numero finito di varietà a $2n-2$ dimensioni (trasformate di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ per le opera-

zioni che portano i campi aventi punti fuori di S nel campo fondamentale cui appartiene X). Si potrà quindi prendere un intorno α del punto X soddisfacente alla condizione 2ª e tutto interno al campo fondamentale e non contenente punti equivalenti a punti all'infinito; il volume di tale intorno sarà

$$v(\alpha) = \iint_{(\alpha)} \cdots \int\int d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Si indichi con $g\alpha$ l'intorno trasformato di α per g: tutti gli intorni $g\alpha$ non contengono punti all'∞ e siccome solo un numero finito di essi è fuori di S, si può trovare una sfera S′ che li comprenda tutti: il volume dell'intorno $g\alpha$, sarà, se si indica con $\frac{D(\xi_i^{(g)} \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i \eta_i)}$ il Jacobiano delle $\xi_i^{(g)} \eta_i^{(g)}$ rapporto alle $\xi_i \eta_i$ $(i = 1 \ldots n)$,

$$v(g\alpha) = \int \cdots \iint_{(g\alpha)} \cdots \int d\xi_1^{(g)} \cdots d\xi_n^{(g)} \, d\eta_1^{(g)} \cdots d\eta_n^{(g)} =$$

$$= \int \cdots \iint_{(\alpha)} \cdots \int \left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Considerando le ξ_i ed η_i come funzioni di x_i, $(x_i)_0$, si ha $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + (x_i)_0)$, $\eta_i = \frac{1}{2i}(x_i + (x_i)_0)$, $\xi_i^{(g)} = \frac{1}{2}(gx_i + (gx_i)_0)$, $\eta_i^{(g)} = \frac{1}{2i}(gx_i - (gx_i)_0)$, quindi

$$\left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| = \left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(gx_i, (gx_i)_0)} \right| \cdot \left| \frac{D(gx_i, (gx_i)_0)}{D(x_i, (x_i)_0)} \right| \cdot \left| \frac{D(x_i, (x_i)_0)}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| .$$

Ma

$$\left| \frac{D(x_i, (x_i)_0)}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| = \left| \frac{D(gx_i, (gx_i)_0)}{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})} \right| = \frac{1}{\left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(gx_i, (gx_i)_0)} \right|} ,$$

$$\left| \frac{D(gx_i, (gx_i)_0)}{D(x_i, (x_i)_0)} \right| = \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \, \frac{D((gx_i)_0)}{D((x_i)_0)} \right| = \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|^2$$

quindi

$$v(g\alpha) = \int \cdots \iint_{(\alpha)} \cdots \int \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|^2 d\xi_1 \ldots d\xi_n \; d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Si deduce che se n_g è il minimo di $\left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|$ in α si ha

$$v(g\alpha) > n_g^2 \int \cdots \iint_{(\alpha)} \cdots \int d\xi_1 \ldots d\xi_n \; d\eta_1 \ldots d\eta_n = n_g^2 \, v(\alpha) .$$

Ma la serie $\sum v(g\alpha)$ è convergente poichè, essendo l'intorno α interno al campo fondamentale, tutti gli intorni $g\alpha$ sono esterni l'uno all'altro ed interni ad S′ onde $\sum v(g\alpha) <$ vol S′; quindi ancora $\sum n_g^2$ è convergente. E poichè,

se N_g è il massimo di $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right|$ in α, si ha $\frac{N_g}{n_g} < \varrho$, anche la serie $\sum N_g^2$ è convergente e quindi pure lo è $\sum \left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right|^2$, c. v. d.

Si deduce che *per gli stessi punti* X *la serie converge per* $m \geq 2$. Infatti siccome $\sum \left[\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right]^2$ converge, vi è solo un numero finito di termini di questa serie per cui $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right| > 1$. Quindi la serie (2) ha, per $m > 2$, i termini tutti finiti e, fatta astrazione per un numero finito di termini, minori di quella per $m = 2$; quindi ancor essa converge.

3. Prima di procedere allo studio più particolareggiato dell'ipotesi che G sia lineare, dobbiamo fare qualche osservazione sulla portata delle ipotesi fatte nella precedente dimostrazione.

1°. Abbiamo supposto il punto X interno al campo fondamentale di G. È evidente che la nostra dimostrazione vale ogni volta che il punto X appartiene ad un numero finito di campi fondamentali, per modo che si possa asserire che l'intorno α od uno qualunque dei suoi trasformati ha punti comuni solo con un numero finito di questi intorni medesimi.

2°. La ipotesi 1ª è essenziale nel precedente ragionamento perchè si possa affermare che la serie $\sum v(g\alpha)$ è convergente. Ma essa non è senza efficacia relativamente all'ipotesi fatta nel numero precedente per quanto riguarda la funzione $R(x_i)$. $R(x_i)$ avrà infatti necessariamente una varietà singolare a $P_{2(n-1)}$ dimensioni, e perchè sia legittima l'ipotesi che $R(x_i)$ resti inferiore in modulo a una quantità finita M in X e nei punti equivalenti a X occorre che il punto X ed i suoi trasformati non abbiano come punto limite alcun punto di $P_{2(n-1)}$. La possibilità di scegliere $R(x_i)$ in questo modo è evidente quando la condizione 1ª sia soddisfatta: basterà che $R(x_i)$ sia razionale intera.

3°. Per quanto precede, la serie (1) converge assolutamente ed uniformemente in α, e quindi rappresenta una funzione delle variabili complesse $x_1 x_2 \ldots x_n$ prolungabile in tutta la regione (connessa) di Σ_{2n} che è ricoperta dai campi equivalenti al campo fondamentale in cui si trova X. Invero non esiste in questa regione di Σ_{2n} una varietà a $2n - 1$ dimensioni in cui (1) diverga: poichè i punti in cui la serie può divergere sono: 1° punti equivalenti a punti di $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$ o punti limiti di essi, 2° punti appartenenti ad infiniti campi fondamentali. Questi ultimi punti non sono che sul contorno di un campo fondamentale e non riempiranno nessuna varietà a $2n - 1$ dimensioni che non sia contorno della regione di cui parliamo (1); quanto ai

(1) Le proprietà qui ammesse pei campi fondamentali e per le reti di tali campi sono generalmente soddisfatte: non entriamo qui in una più minuta discussione su ciò:

primi si osservi che i punti equivalenti a punti di $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$ internamente ad ogni campo fondamentale formano una varietà a non più di $2n-2$ dimensioni; e quindi essi od i loro punti limiti possono riempire una varietà a $2n-1$ dimensioni, solo quando i punti di questa siano punti limiti di infiniti campi fondamentali e cioè appartengano al contorno della regione di cui parliamo.

4°. Alla condizione 1ª si può sostituire la seguente condizione: *Preso un punto* X, *si può descrivere un intorno di* X *tale che esso ed i suoi trasformati siano interni ad una sfera* S *variabile con* X. *I punti che non soddisfanno a questa condizione formano una varietà a* $2(n-1)$ *dimensioni al più, internamente ad ogni campo fondamentale.* In particolare stanno quindi su una varietà a $2(n-1)$ dimensioni i punti trasformati di punti di $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$.

4. Passiamo ora a studiare più da vicino i gruppi lineari. Mostreremo che *in questo caso la condizione 2ª è conseguenza della 1ª* (od anche della condizione più ampia enunciata in 4°, n. 3).

Cominciamo col supporre che non sia G un gruppo misto, e cioè che non sia tale che le sue variabili si possano dividere in k sistemi tali, che ogni operazione di G si componga di più trasformazioni ognuna operante su uno di questi k sistemi.

Un'operazione di G si scriverà allora

$$gx_i = \frac{\sum a_{ik} x_k + a_i}{\sum b_k x_k + b} \quad (i = 1 \dots n)$$

il denominatore essendo lo stesso per tutti gli indici i. Il Jacobiano di tale trasformazione sarà allora [1]

$$\frac{D(gx_i)}{D(x_i)} = \frac{1}{(\sum b_k x_k + b)^n}. \tag{4}$$

Cerchiamo il significato di tale Jacobiano. Si consideri il $(\Sigma)_{n-1}$ che ha per equazione $\sum b_k x_k + b = 0$; esso è per g portato in $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$. Posto $b_k = \beta_k + i\beta'_k$, $b' = \beta + i\beta'$ le sue equazioni reali sono

$$\sum \beta_k \xi_k - \sum \beta'_k \eta_k + \beta = 0$$
$$\sum \beta'_k \xi_k + \sum \beta_k \eta_k + \beta' = 0.$$

Ciascuna di queste equazioni rappresenta un Σ_{2n-1} e questi due Σ_{2n-1} si

---

come non discutiamo sotto quali condizioni si può parlare di campi fondamentali pel gruppo. Cfr. del resto su ciò Fubini, Annali di Mat. serie 3ª, vol. 12.

[1] Cfr. Fubini, *Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti*, Annali di Matematica, vol. 10, ser. III. Una più semplice dimostrazione di ciò sarà data in un trattato del Fubini sulle funzioni automorfe, di prossima pubblicazione.

intersecano ortogonalmente nel nostro $(\Sigma)_{n-1}$. Quindi la distanza d di un punto qualunque $x_i = \xi_i + i\eta_i\,(i = 1 \dots n)$ dal $(\Sigma)_{n-1}$ è data da

$$d^2 = \frac{(\sum \beta_k \xi_k - \sum \beta'_k \eta_k + \beta)^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)} + \frac{(\sum \beta'_k \xi_k + \sum \beta_k \eta_k + \beta')^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)} = \frac{|\sum b_k x_k + b|^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)}.$$

Quindi si deduce

$$\frac{1}{|\sum b_k x_k + b|} = \frac{\sqrt{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)}}{d}. \tag{5}$$

Ciò posto, si consideri un punto X non equivalente ad un punto del $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$. Per la condizione enunciata in 4° n. 3 (e quindi in particolare se è soddisfatta la condizione 2ª) i punti che non soddisfanno a questa restrizione riempiono al più una varietà a $2(n-1)$ dimensioni. Si potrà quindi descrivere una ipersfera di centro X e raggio l tanto piccola che non contenga che punti soddisfacenti alle condizioni stesse che X; si prenda come intorno α di X l'ipersfera di centro X e raggio $\frac{l}{2}$. Comunque si fissi una trasformazione g di G, la minima distanza $\bar{d}$ di un punto di α dal $(\Sigma)_{n-1}$ trasformato di $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$ sarà $\bar{d} \geq \frac{l}{2}$. La massima distanza di un punto di α da uno degli stessi $(\Sigma)_{n-1}$ sarà $D \leq \bar{d} + l$; quindi il rapporto della massima alla minima distanza dei punti di α da uno dei $(\Sigma)_{n-1}$ equivalenti a $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$ per una qualunque operazione g di G è < 3; e per (5) e (4) il rapporto del massimo al minimo valore del modulo di $\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}$ nei punti di α è $< 3^n$. Quindi risulta quanto erasi enunciato.

Qualora il gruppo G sia un gruppo misto, le cose dette valgono ancora con poche modificazioni.

Siano in tal caso $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}, \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}$ $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$ i k sistemi di variabili, e sia la trasformazione g di G data dalle formule

$$gx_i^{(1)} = \frac{\sum a_{ij}^{(1)} x_j^{(1)} + a_j^{(1)}}{\sum b_j^{(1)} x_j^{(1)} + b^{(1)}}\,(i = 1 \dots n_1)\ ,\ gx_i^{(2)} = \frac{\sum a_{ij}^{(2)} x_j^{(2)} + a_j^{(2)}}{\sum b_j^{(2)} x_j^{(2)} + b^{(2)}}\,(i = 1 \dots n_2)\,; \dots;$$

$$gx_i^{(k)} = \frac{\sum a_{ij}^{(k)} x_j^{(k)} + a_j^{(k)}}{\sum b_j^{(k)} x_j^{(k)} + b^{(k)}}\,(i = 1 \dots n_k)$$

e da questa trasformazione saranno portati all'infinito i k $(\Sigma)_{n-1}$ dati dalle equazioni:

$$\sum_1^{n_1}{}_j\, b_j^{(1)} x_j^{(1)} + b^{(1)} = 0\ ,\ \sum_1^{n_2}{}_j\, b_j^{(2)} x_j^{(2)} + b^{(2)} = 0\ , \dots,\ \sum_1^{n_k}{}_j\, b_j^{(k)} x_j^{(k)} + b^{(k)} = 0$$

(onde in tal caso converrebbe meglio considerare i punti all'infinito di $(\Sigma)_n$ come formanti k $(\Sigma)_{n-1}$). Alla (4) si sostituirà la formula

$$\frac{D(gx_i)}{D(x_i)} = \prod_1^k{}_f \frac{1}{[\sum b_j^{(f)} x_j^{(f)} + b^{(f)}]^{n_f}}.$$

E su tale espressione, in base alla formula (5), si potranno ripetere ragionamenti del tutto analoghi a quelli precedenti, e conchiudere che la nostra affermazione è vera ancora per tali classi di gruppi.

Avremo quindi:

Se un gruppo di operazioni lineari è propriamente discontinuo e se per una determinata rete di campi fondamentali è possibile descrivere un'ipersfera tale che solo un numero finito di campi fondamentali abbia punti fuori di essa;

o, più generalmente,

se per ogni punto della regione ricoperta dalla rete, il quale non appartenga ad una certa varietà a $2n-2$ dimensioni, si può trovare un intorno α tale che esso e tutti i suoi trasformati stiano entro una ipersfera conveniente (dipendente dal punto),

le serie (1) *del Poincaré sono convergenti e rappresentano* (ove si ammetta che non sono identicamente nulle) *funzioni delle variabili complesse $x_1 x_2 \dots x_n$ esistenti nella regione ricoperta dai campi della rete medesima. Ed il rapporto di due di queste funzioni* (ove si ammetta che esse non sono solo differenti per un fattore costante) *rappresenta una funzione automorfa pel gruppo* G. *Pel gruppo* G *e per tutti i gruppi simili ad esso è quindi dimostrato il teorema di esistenza.*

5. È chiaro che le classi di gruppi per cui è nota la convergenza delle serie (1) rientrano nelle classi ora studiate. Essi sono invero:

1°. *Gruppi fuchsiani e kleiniani.* Sarà $n = 1$. Il $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ si riduce ad un punto: e la nostra condizione si riduce all'altra che questo punto sia un punto di propria discontinuità pel gruppo. A ciò ci possiamo sempre ridurre con una trasformazione lineare (1).

2°. *Gruppi iperfuchsiani.* Si possono sempre ridurre a trasformare in sè l'interno di una ipersfera $\sum x x_0 = 1$: quindi il $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ è esterno a tutti i campi fondamentali relativi a punti interni all'ipersfera (2).

3°. *Gruppi fuchsiani e iperfuchsiani misti.* Si può fare in modo che il gruppo su ogni sistema di variabili trasformi in sè una ipersfera nello spazio subordinato in cui esse sono coordinate. Anche in tal caso

(1) Poincaré, Acta Mathematica, vol. 1 e 3.

(2) Picard, Acta Mathematica, vol. 1 e 4; Fubini, *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane ecc.* ed *Applicazioni analitiche dei gruppi ecc.* Atti dell'Accademia Gioenia, serie 4ª, vol. XVII e *Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti*, Annali di Matematica, tomo 10, serie 3ª.

quindi $(\Sigma)^{\infty}_{n-1}$ è esterno a tutti i campi fondamentali relativi a punti interni alla regione che ha tali ipersfere come proiezioni sugli spazî subordinati. Questi gruppi contengono i gruppi *iperabeliani* del Picard (1).

Ma altri gruppi rientrano in tale classe. Ci limiteremo ad un esempio: sia $V(x\,x_0) = 0$ una equazione Hermitiana (2) nelle variabili x e nelle variabili coniugate x_0, che rappresenti in Σ_{2n} una varietà algebrica a $2n - 1$ dimensioni che divida il Σ_{2n} in due regioni una finita e l'altra infinita; e sia G un gruppo propriamente discontinuo (3) di trasformazioni lineari delle variabili che trasformi in sè la $V(x\,, x_0) = 0$: si potrà in tal caso evidentemente applicare o a G o al suo sottogruppo di indice 2 che trasforma in sè ciascuna delle due regioni, il teorema precedente e risulterà che per esso esistono funzioni automorfe.

6. Ci resta a dimostrare che le serie (1) non sono identicamente nulle. Infatti, preso un punto X in cui la serie (1) converga assolutamente, sarà finito il numero delle operazioni g per cui il Jacobiano $\dfrac{D(gx_i)}{D(x_i)}$ è maggiore in valore assoluto di quello delle residue operazioni: sia esso k e siano $g_1\, g_2 \ldots g_k$ le sostituzioni corrispondenti: sia D il valore comune di $\left|\dfrac{D(g_j x_i)}{D(x_i)}\right|$ in X $(j = 1\,, 2\,, \ldots k)$. Si avrà per $g \neq g_1\,, g_2\,, \ldots\,, g_k$ $\left|\dfrac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right| \leqq h\,D$ essendo $h < 1$.

Si supponga ora di considerare la serie

$$(6) \qquad \sum R(x_i) \left[\frac{D(g\,x_i)}{D(x_i)}\right]^m$$

dove $R(x_i)$ soddisfaccia alla condizione che il minimo dei valori in X di

$$\left|\sum_{j=1\cdots k} \pm |R(g_j x_i)|\right|$$

per tutti i sistemi di segni possibili sia un numero $H \neq 0$: e supponiamo che questa serie sia identicamente nulla. Potremo scrivere allora

$$\sum_{j=1\cdots k} R(g_j\, x_i) \left[\frac{D(g_j x_i)}{D(x_i)}\right]^m = - \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} R(g\,x_i) \left[\frac{D(g\,x_i)}{D(x_i)}\right]^m ;$$

(1) Picard, *Sur les fonctions hyperabéliennes* Journal de Liouville, ser. IV, vol. I, 1885, Blumenthal, *Ueber Modulfunctionen von mehreren Veränderlichen*, Mathematische Annalen, vol. 56 e 58 e Fubini, loc. cit. e una Memoria di prossima pubblicazione negli Annali di Matematica.

(2) Voglio con ciò indicare che, scritta nelle variabili ξ ed η, l'equazione $V(x\,x_0) = 0$ sia a coefficienti reali. Delle equazioni che soddisfacciano alle condizioni del testo esistono evidentemente per es.: $(x_1\, x_{10})^2 + (x_1\, x_{10})\,(x_2\, x_{20}) + (x_2\, x_{20}) - 1 = 0$.

(3) Circa la discontinuità propria di questi gruppi vedi Fubini, *Sulla teoria dei gruppi discontinui*, Annali di Matematica, serie 3ª, vol. 11.

e poichè si vide che la serie (6) converge assolutamente, osservando che è

$$\left| \sum_{j=1\cdots k} \mathrm{R}(g_j x_i) \left[\frac{\mathrm{D}(g_j x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right]^m \right| \geq \mathrm{H}\,\mathrm{D}^m,$$

si avrà

$$\mathrm{H}\mathrm{D}^m = k \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g x_i)| \left| \frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right|^m$$

dove, poichè $\mathrm{H} \neq 0$, k è un numero $(< 1) \neq 0$. Segue di qui:

$$\sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g x_i)| \left| \frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right|^{m_1} < h^{m_1 - m}\, \mathrm{D}^{m_1 - m} \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g x_i)| \left| \frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right|^m =$$

$$= \frac{h^{m_1 - m}}{k} \mathrm{D}^{m_1} \mathrm{H}.$$

Ossia, se si suppone m_1 tanto grande che sia $h^{m_1 - m} < k$, il che è possibile perchè $h < 1$ e $k \neq 0$,

$$\left| \sum_{j=1\cdots k} \mathrm{R}(g_j x_i) \left[\frac{\mathrm{D}(g_j x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right]^{m_1} \right| > \mathrm{H}\mathrm{D}^{m_1} > \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g x_i)| \left| \frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right|^{m_1} \geq$$

$$\geq \left| \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} \mathrm{R}(g x_i) \left[\frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right]^{m_1} \right|.$$

Quindi la serie $\sum \mathrm{R}(g x_i) \left[\frac{\mathrm{D}(g x_i)}{\mathrm{D}(x_i)} \right]^{m_1}$ non può essere nulla in X e quindi rappresenta realmente una funzione di $x_1 x_2 \ldots x_n$.

7. Ci resterebbe a mostrare che i rapporti delle serie (1) non sono sempre costanti. È facile vedere che la dimostrazione che diede il Picard nella Memoria già citata degli Acta si estende con poche modificazioni, analoghe a quelle del numero precedente, al caso presente. Anzi tale metodo serve a dimostrarci di più che *si possono trovare n funzioni indipendenti automorfe rispetto a* G.

Matematica. — *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio G. VERONESE.

Sia

$$f(x_0\, x_1 \dots x_r) = 0 \tag{1}$$

una forma algebrica d'ordine l nelle variabili $x_0 \dots x_r$, cioè un polinomio omogeneo di grado l nelle x. Il *discriminante* della f è il risultante della eliminazione delle x tra le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,,\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0\,. \tag{2}$$

L'annullarsi del discriminante esprime dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni (2) abbiano soluzioni comuni (appartenenti in virtù dell'identità di Eulero anche alla (1)).

Si supponga che le equazioni

$$\begin{cases} f(x_0\, x_1 \dots x_r) = 0 \\ \varphi_i\,(x_0\, x_1 \dots x_r) = 0 \quad (i = 1\,,\ 2\,,\ \dots\,,\ s)\,, \end{cases} \tag{3}$$

ove anche le φ sono forme nelle x, ammettano ∞^{r-2} soluzioni, riguardandosi come coincidenti due soluzioni del tipo $(x_0\, x_1 \dots x_r)$, $(\varrho x_0\,,\ \varrho x_1\,,\ \dots\,,\ \varrho x_r)$.

In generale non è possibile sostituire al sistema di equazioni (3) un sistema equivalente di due sole equazioni, come a priori lo potrebbe far supporre il fatto che *due* è il minimo numero di equazioni aventi in comune ∞^{r-2} soluzioni. Tale impossibilità generica è ben nota.

In questo lavoro io dimostrerò che *quando una* (*almeno*) *delle forme* $f\,,\ \varphi_i$ *ha il discriminante non nullo, il sistema* (3) *è equivalente ad un sistema di 2 sole equazioni. Per la validità del teorema occorre però che le equazioni contengano più di 4 variabili.*

Per evitare di dilungarmi soverchiamente, nell'enunciato che precede ho un po' allargato il significato di equivalenza tra due sistemi di equazioni omogenee (ad $r+1$ variabili) con ∞^{r-2} soluzioni. Due sistemi siffatti li ho cioè riguardati come « equivalenti » quando posseggono ∞^{r-2} soluzioni comuni. Con ciò non si viene ad escludere l'esistenza di ∞^{r-3} soluzioni (al più) appartenenti ad un sistema e non all'altro.

L'enunciato però si semplifica e si determina di più col linguaggio geometrico. Assumendo $x_0\, x_1 \dots x_r$ come coordinate omogenee di un punto in uno spazio S_r, la (1) rappresenta un'ipersuperficie o forma (quale luogo di

punti). Le equazioni a discriminante non nullo rappresentano forme prive di punti multipli. — Il sistema (2) sia soddisfatto dai punti di una varietà algebrica ad $r-2$ dimensioni (appartenente alla forma $f=0$).

Allora il teorema ch'io intendo dimostrare si enuncia così:

Sopra una forma algebrica V, *priva di punti multipli, dello spazio* S_r, *ogni varietà algebrica ad* $r-2$ *dimensioni, è la completa intersezione di* V *con un'altra forma.*

Di questa singolare proprietà delle forme algebriche erano già noti due casi speciali; e cioè il caso delle quadriche di S_r, studiato dal Klein, ed il caso della varietà cubica dello spazio S_4 studiato dal Fano (1). Ma questi casi non lasciavano affatto supporre che si trattasse di una proprietà comune a tutte le forme prive di punti multipli, perchè le conclusioni ad essi relative derivavano da speciali proprietà delle varietà considerate, e d'altra parte un'ovvia osservazione mostrava come il teorema non fosse vero per le superficie dello spazio ordinario.

Però il Noether nella sua Memoria premiata col premio Steiner, aveva dimostrato che « le curve appartenenti ad una superficie generale d'ordine n son tutte intersezioni complete »; o, più precisamente, che le superficie d'ordine n sulle quali esistono altre curve, oltre alle intersezioni complete, formano nello spazio una varietà meno ampia di quella costituita da tutte le superficie d'ordine n (2).

Il teorema contenuto in questa Nota può dunque riguardarsi anche come un'estensione del teorema di Noether; soltanto, per $r>3$, il teorema è ancor più espressivo.

1. Cominciamo dal caso $r=4$. Sopra la forma V, d'ordine l, e priva di punti multipli nello spazio S_4, consideriamo una superficie F, irriducibile e priva anch'essa di punti multipli. Diciamo n l'ordine di F, a il rango della sua sezione iperpiana (n. delle tangenti di questa sezione appoggiate ad una retta del suo spazio), j il numero dei piani tangenti ad F e passanti per un punto dello S_4 (n. dei *pinch-points* della proiezione di F sullo S_3).

Essendo la F priva dei punti multipli, e quindi in particolare di punti doppi improprî, tra i caratteri n, a, j avremo la relazione

$$n(n-1)=a+j \quad (4)$$ (3).

(1) Klein, *Ueber einen liniengeometrische Satz* (Math. Annalen, t. 22); Fano, *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni* (Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, t. 39, 1904).

(2) *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (Abhandlungen der Berliner Akad., 1882) §§ 11, 12.

(3) Ved. il n. 2 della mia Nota, *Intorno ai punti doppi improprî di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni*, ecc. (Rend. del Circolo Mat. di Palermo,

Ma tra questi caratteri havvi un'altra relazione. Invero, nella mia Memoria *Sulle intersezioni delle varietà* (citata a pie' di pagina) ho dimostrato che una forma dello S_4, obbligata a passare per una superficie, viene di conseguenza ad avere come punti doppi gli eventuali punti doppi improprî della superficie, e generalmente altri punti doppi in punti semplici di questa. Ho anche assegnato il numero di questi punti doppi. Nel caso attuale si ottiene appunto la relazione

$$(5) \qquad nl(l-2) - n^2 - al + 2(n + a + j) = 0,$$

esprimente che la forma V non ha punti doppi in punti (semplici) di F [1]. Eliminando $a + j$ tra le (4) (5), si ha

$$(6) \qquad nl(l-2) + n^2 = al.$$

Pongasi $n = ml - \nu$ $(m \geq 1, 0 \leq \nu < l)$. Allora la (6) diviene:

$$(7) \qquad ml^2(l-2) - \nu l(l-2) + m^2l^2 + \nu^2 - 2ml\nu = al.$$

Poichè la sezione spaziale di F è una curva tracciata sopra una superficie d'ordine l priva di punti multipli (la sezione spaziale di V), un bel teorema di Valentiner e Noether ci dice che il genere p di questa curva soddisfa alla disuguaglianza

$$p \leq \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + \tfrac{1}{2}(ml - 2\nu)(m + l - 4) \ [2].$$

Se ne deduce una disuguaglianza cui soddisfa il rango a $(= 2n + 2p - 2)$, e questa disuguaglianza, confrontata colla (7), dopo facili riduzioni porge:

$$(8) \qquad \nu(l - \nu)(l - 1) \leq 0.$$

Essendo $l > \nu$, se fosse $\nu > 0$, cioè $\nu \geq 1$, oltre ai fattori ν, $l - \nu$, risulterebbe positivo anche il fattore $l - 1$, e quindi la (8) non resterebbe soddisfatta. Conviene pertanto concludere che $\nu = 0$, ossia che $n = ml$.

Dalla (6) ricavasi allora

$$a = ml(m + l - 2), \text{ e quindi: } (9)\ p = \tfrac{1}{2}ml(m + l - 4) + 1.$$

Nella citata Memoria di Noether si trova dimostrato, come caso particolare del teorema sulle curve di massimo genere appartenenti ad una superficie di dato ordine, che « una curva d'ordine ml e genere p dato dalla « (9), la quale sia tracciata sopra una superficie d'ordine l, priva di punti

---

t. 15, 1901). Ved. pure il n. 3 della mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc. (Memorie della R. Acc. di Torino, (2), t. 52, 1902), ove trovansi considerati i punti multipli improprî di una varietà qualunque.

[1] La (5) deriva dalla formola generale data alla fine del n. 7 della Memoria *Sulle intersezioni delle varietà*. Ved. anche la fine del n° 21, ove trovasi la formola particolare che serve al nostro caso.

[2] *Zur Grundlegung der Th. d. alg. Raumk.*

« multipli, è intersezione completa di questa superficie con un'altra d'or-
« dine m ».

Dunque *la sezione iperpiana della nostra superficie* F *è intersezione completa della sezione iperpiana di* V *con una superficie d'ordine* m.

2. Dalla proprietà dimostrata trarremo che F è essa stessa intersezione completa di V con una forma d'ordine m, mediante considerazioni di geometria sopra una superficie e sopra una varietà.

Si osservi in primo luogo che curve C', aggiunte alla sezione iperpiana generica C della F, son segnate su F dalle forme d'ordine $l+m-4$ dello S_4. Invero, sulla C, priva di punti multipli e intersezione completa di due superficie di ordini l, m, la serie canonica completa è segata dalle superficie d'ordine $l+m-4$ (Noether). Sicchè sulla F le forme di ordine $l+m-5$ dello S_4 segano un sistema lineare di curve canoniche $C'-C$ (che a priori non possiamo dir completo).

Entro alla V dicasi ora $|F'|$ il sistema lineare aggiunto ad $|F|$, cioè il sistema somma di $|F|$ e del sistema canonico $|L|$ di V, che è ivi segato da tutte le forme d'ordine $l-5$ (Noether). S'indichi inoltre con $|G|$ il sistema delle sezioni iperpiane di V, sicchè $|(l+m-5)G|$ indicherà il sistema staccato su V dalle forme d'ordine $l+m-5$.

Poichè le superficie F', $(l+m-5)G$ staccano su F curve (canoniche) equivalenti, saranno pure equivalenti i gruppi segnati da quelle superficie sopra una sezione iperpiana di F, cioè sopra una C. Ora, fissata una generica superficie G — sezione iperpiana di V — l'intersezione C di F e G, per la conclusione del n. prec., individua su G il sistema lineare completo ivi segato dalle superficie d'ordine m; dunque le superficie F', $(l+m-5)G$ si trovano nella condizione di staccare gruppi equivalenti sopra una curva irriducibile C di G, variabile in un sistema continuo di grado >0. Tanto basta per concludere che le F', $(l+m-5)G$ segnano curve equivalenti sopra G [1], cioè sulla sezione iperpiana generica di V. Ne deriva che

$$F' \equiv (l+m-5)G \ [2].$$

Essendo inoltre

$$F' \equiv F+L \equiv F+(l-5)G,$$

verrà:

$$F+(l-5)G \equiv (l+m-5)G, \text{ cioè: } F \equiv mG.$$

In parole: La superficie F appartiene al sistema lineare completo individuato da una superficie mG. E siccome le forme d'ordine m segnano su

[1] Ved. il teor. I della mia Nota, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto Veneto, t. 65, 1906).

[2] Ibidem, teor. IV.

V un sistema lineare *completo* (1), si conclude che F è intersezione completa di V con una forma d'ordine m, c. d. d.

3. Con ciò il teorema resta stabilito per ogni superficie di V, la quale sia priva di punti multipli. Passeremo ora ad estenderlo a una superficie (irriducibile) dotata di singolarità qualunque (necessariamente proprie).

Supporremo dunque in quel che segue che F designi una superficie d'ordine n con singolarità arbitrarie. Dico anzitutto che « le forme d'ordine n passanti per F segnano altrove su V un sistema lineare $|\Phi|$ privo di punti base ».

Per brevità designeremo con Γ_X il cono che proietta F da un punto X dello S_4 (anche situato su F). È chiaro allora, in primo luogo, che un punto P, esterno ad F, non può esser base per $|\Phi|$, perchè il cono Γ_Q relativo ad un punto Q, esterno a Γ_P, non passa per P, e quindi esso segna su V una Φ non passante per P.

Sia ora P un punto s-plo di F($s \geq 1$). Il cono d'ordine s tangente ad F in P starà tutto nello S_3, π, tangente a V in P. Ciò premesso consideriamo il cono Γ_Q relativo ad un punto Q esterno a π, ed osserviamo che la retta QP è luogo di punti s-pli per Γ_Q, ma che questo cono non tocca lungo QP lo spazio π. Ne deriva che l'intersezione $F + \Phi$ di Γ_Q colla V ha in P un punto di molteplicità s e *non maggiore*, e quindi che Φ non passa per P. È dunque vero che $|\Phi|$ non ha punti base nè su F nè fuori di F.

Da ciò segue:

a) Che una Φ generica è priva di punti multipli. Infatti su V la superficie generica d'un sistema lineare non può avere punti multipli fuori dei punti base, e d'altronde $|\Phi|$ è privo di punti base (2).

b) Che una Φ generica è irriducibile. Infatti se una Φ generica fosse spezzata, le due parti, essendo immerse nello S_4, avrebbero necessariamente dei punti comuni, che riuscirebbero multipli per Φ, contrariamente all'affermazione *a*).

Ma allora alla superficie Φ d'ordine $n(l-1)$ possiamo riferire la conclusione del n. 2. Dovrà quindi essere $n(l-1)$ multiplo di l, cioè $n = ml$, e

$$\Phi \equiv m(l-1)\,G.$$

E poichè $F + \Phi \equiv ml\,G$, risulta ancora $F \equiv m\,G$. Donde si trae che F è intersezione completa di V con una forma d'ordine m, sempre per la ragione che le forme di un dato ordine segnano su V un sistema completo.

Il teorema è così dimostrato per $r = 4$.

(1) Ved. p. e. la mia Nota, *Su alcune questioni di postulazione* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. 17, 1903).

(2) Cfr. il n. 1 della mia Nota, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 61, 1905).

4. *L'estensione ad r qualunque si ottiene immediatamente* per induzione, seguendo passo passo la dimostrazione esposta nei nn. 2, 3.

Suppongasi infatti di avere nello S_r una forma V d'ordine l priva di punti multipli, ed ivi una varietà F ad $r-2$ dimensioni, priva di punti multipli e d'ordine n. Ammesso il teorema per le forme dello S_{r-1}, si ha in primo luogo che la sezione iperpiana di F è completa intersezione della sezione iperpiana di V con una forma d'ordine $m = \frac{n}{l}$. Colle considerazioni dei sistemi aggiunti e canonici, si giunge, come al n. 2, alla conclusione che $F \equiv mG$, G essendo una sezione iperpiana di V; e da ciò segue, al solito, che F è intersezione completa.

Si dimostra poi il teorema anche per varietà F dotate di singolarità qualunque, estendendo il ragionamento del n. 3.

Meccanica. — *Sulle equazioni dell'Elasticità.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Meccanica. — *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Fisica matematica. — *Nuove osservazioni sul problema dell'induzione magnetica.* Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Storia della Scienza. — *Sulle origini della Statica.* Lettera al Presidente del prof. P. Duhem.

Il y a un an, l'Académie Royale des Lincei voulait bien accueillir favorablement l'hommage du premier volume de mon ouvrage sur *les origines de la Statique*: je viens aujourd'hui lui demander de recevoir avec la même bienveillance le tome second du même ouvrage.

Le premier volume me semblait de nature à intéresser l'Académie par les renseignements qu'il contenait sur l'œuvre de Léonard de Vinci, dont elle édite si magnifiquement le *Codice Atlantico*; le second volume pourra, je l'espère, l'intéresser également; non seulement, en effet, il grandit encore le rôle que Léonard a joué dans la création de la Statique moderne, mais encore il s'efforce de retrouver tous les germes d'une découverte faite par un personnage, objet tout particulier des préoccupation de l'Académie: je veux parler d'Evangelista Torricelli.

La plus grande partie du volume, en effet, est consacrée à retracer l'histoire de ce principe dont Lagrange attribue l'invention à Torricelli: *Un système pesant est en équilibre lorsque tout dérangement virtuel de se système obligerait le centre de gravité à s'élever.*

Pour retrouver la première source de ce principe, il faut remonter jusqu'à la théorie de la pesanteur soutenue par Aristote: Tout grave tend vers son lieu naturel, qui est le centre du monde; mais la totalité de ce grave ne pourrait se loger au centre du monde, qui n'est qu'un point; le grave demeurera donc en équilibre lorsqu'un certain point milieu (*τὸ μέσον*), qu'Aristote ne précise pas autrement, se trouvera au centre du monde. Simplicius, commentant ce passage du *Περὶ Οὐρανοῦ*, mentionne, à ce sujet, « les recerches sur les *κεντροβαρικὰ* d'Archimède et de plusieurs autres ».

La question n'acquiert aucune précision nouvelle dans les écrits des commentateurs arabes, d'Albert le Grand et de saint Thomas d'Aquin. Mais au milieu du XIV^e^ siècle, un maître de l'Université de Paris, Albert de Helmstaedt, dit Albert de Saxe, transforme ces indications en une doctrine formelle: En chaque corps grave, il existe un point, qui en est le centre de gravité, et qui tend à se placer au centre du monde; ou mieux, un grave détaché de la terre et le reste de la terre se meuvent jusqu'à ce que le centre de gravité de l'ensemble se trouve au centre du monde.

Cette doctrine, développée par Albert de Saxe en ses *Subtilissimæ quæstiones* sur la Physique et sur le *De cælo* d'Aristote, domine toutes les discussions relatives à la pesanteur qui se produisent au Moyen-Age et à l'époque de la Renaissance. La révolution Copernicaine y apporta une modification;

les partisans de Copernic admirent que tout fragment d'un astre possède une gravité particulière et qu'il tend à mettre son centre particulier de gravité en un point spécial à cet astre; c'est sous cette forme nouvelle que la théorie d'Albert de Saxe était encore admise par Galilée. La modification apportée à cette doctrine par Copernic était fort importante pour la Mécanique céleste; elle ne tirait guère à conséquence pour la Statique.

La terre est en repos lorsque son centre de gravité se trouve au centre du monde; cette proposition doit elle s'entendre de l'aggrégat de la terre et de l'eau, ou seulement de la terre ferme? Après quelque hésitation, Albert de Saxe s'était déclaré en faveur de la seconde opinion, mais sans mettre fin au débat qui dura jusqu'au début du XVII^{e} siècle. La théorie de la pesanteur donnée par Albert de Saxe se trouve, par la, très intimement liée aux discussions sur la figure de la terre et des mers qui se produisirent entre les années 1360 et 1600; nous avons été amenés de la sorte à retracer l'histoire de ces discussions.

Les écrits d'Albert de Saxe ont été très profondément étudiés par Léonard de Vinci; la théorie de la pesanteur du maître de l'Université de Paris a suggéré au grand artiste le théorème du *polygone de sustentation* dont il fait un fréquent usage au traité de la peinture.

Les recherches de Léonard sur les propriétés statiques du centre de gravité ont été certainement plagiées au XVI^{e} siècle; en particulier, les *théorèmes* insérés en 1604 par le P. J. B. Villalpand dans son commentaire sur la vision d'Ezéchiel doivent être regardés comme une sorte de paraphrase d'un traité du Vinci; il en est de même de nombreux passages des *Exercitationes* sur les Questions mécaniques d'Aristote, de Bernardino Baldi; c'est par ces écrits que le théorème sur le polygône de sustentation est venu à la connaissance des mécaniciens.

C'est dans la seconde édition, publiée en 1554, de ses XXI livres *sur la subtilité* que Jérôme Cardan, voulant rendre compte de l'équilibre d'un seau suspendu d'une manière étrange, suppose pour un instant que ce seau tombe et ajoute: « Igitur centrum gravitatis elongatum est a centro terræ sponte, igitur motu naturali grave ascendit, quod esse non potest. Non igitur situla descendit.... ». Nous trouvons là le premier germe du principe qui sera invoqué par Torricelli.

Chose curieuse: Le cas d'équilibre que Cardan prétend expliquer par ce raisonnement est absurde; mais nous y reconnaissons sans peine la déformation d'un cas d'équilibre paradoxal imaginé par Léonard de Vinci. L'équilibre absurde décrit par Cardan est reproduit par Mersenne en sa *Synopsis mathematica*, publiée en 1626; il y est précédé d'un autre cas d'équilibre, sensé celui-là; or dans les manuscrits de Léonard de Vinci, ce second cas d'équilibre se trouve également décrit, immédiatement avant celui dont Cardan et Mersenne ont reproduit la déformation. On est ainsi amené à penser

que Cardan et Mersenne ont eu en mains un écrit copié, et mal copié, sur un traité de Léonard. C'est donc à celui-ci qu'il faudrait attribuer la première invention du principe auquel Torricelli donnera sa forme définitive.

Ce principe, Galilée le formule nettement au *Scholium generale* qu'il adressa le 3 Décembre 1639 au P. Benedetto Castelli et qui, à partir de la seconde édition des *Discorsi*, prit place en la troisième journée; Galilée l'énonce ainsi: « ... poichè siccome è impossibile, che un grave, o un composto di essi si muova naturalmente all'in su discostandosi dal comun centro, verso dove conspirano tutte le cose gravi, così è impossibile, che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al sudetto centro comune ».

On voit que Galilée rattache très nettement ce principe à la doctrine d'Albert de Saxe, à peine modifiée par Copernic. Or cette doctrine suppose que le point d'application de la résultante des poids des diverses parties du corps est un point (*centre de gravité*) qui demeure fixe dans ce corps lorsque ce corps s'approche du centre commun des graves, et même s'il applique ce centre de gravité au centre commun des graves.

La Mécanique a eu très grand peine à se débarrasser de cette notion fausse du centre de gravité; elle y est parvenue à la suite d'une discussion provoquée par la *Géostatique* de Jean de Beaugrand, et à laquelle prirent part Beaugrand et Fermat d'un côté, Etienne Pascal, Roberval et Descartes de l'autre. Beaugrand et Fermat tiraient tous leurs principes de la doctrine d'Albert de Saxe; leurs adversaires leur prouvaient que ces principes étaient en contradiction avec ceux de la saine mécanique.

Le P. Castelli avait eu commerce avec Beaugrand et avait retrouvé de son côté les théorèmes étranges de Fermat; Torricelli, son élève dut connaître par lui les diverses phases de la querelle sur la Géostatique; toujours est il qu'il usa sans cesse de la notion de centre de gravité sous une forme absolument correcte, et qu'il donna cette même forme correcte au principe de Statique qui porte habituellement son nom.

Fisica. — *Sulla radioattività dei fanghi termali depositati negli stabilimenti dei Bagni di Lucca* (Toscana). — Nota del Dott. G. Magri (1), presentata dal Corrispondente A. Battelli.

In una precedente comunicazione (2) misi in evidenza la radioattività dei fanghi depositati dalle sorgenti termali dei Bagni di Lucca; accennai pure nella Nota ricordata che era in corso uno studio diretto a stabilire a quale delle sostanze radioattive dovevasi quella forte attività. Lo studio ci

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica della R. Università di Pisa.

(2) Rendic. R. Acc. Lincei, vol. XV, S. 5ª, 1° semestre 1906, pag. 14.

proponemmo di farlo in collaborazione il prof. Antony ed io, se non che il prof. Antony, con gentile profferta, volle che fosse da me continuato.

Era ovvio che lo studio dei fanghi si dovesse volgere su due punti importanti:

1° Separazione in gruppi delle sostanze in essi contenute ed esame di uguali pesi di queste all'elettroscopio.

2° Studio fisico della emanazione emessa da una soluzione del fango comunque ottenuta.

Per il primo quesito applicai il metodo sistematico di analisi variamente modificato ove l'occorrenza si fece sentire; pel secondo i metodi generali di ricerca suggeriti dal Soddy (1).

Per le determinazioni di radioattività mi valsi dell'elettroscopio descritto nella Nota precedente: per le ricerche sulle sostanze solide mi servì la forma I; per le altre adottai un dispersore cilindrico alto mm. 70 e del diametro di mm. 44 posto entro la campana alta mm. 99 e del diametro di mm. 140.

Il fango da me adoperato in queste ricerche è un misto dei fanghi delle diverse sorgenti. Asciugato e seccato, liberato con staccio dai pezzi più grossi di roccia, pesava circa 1600 gr. Di questo ne fu prelevato un campione d'assieme di 200 gr. ed altri 300 gr. furono sciolti la metà in acqua regia, l'altra in acido solforico diluito, per lo studio dell'emanazione.

Come si vede potei avere a mia disposizione un materiale molto scarso, poichè per la separazione in gruppi mi rimasero soltanto circa gr. 1100. Feci l'attacco della sostanza con acqua regia per asportare dalla silice il più possibile delle sostanze mescolatevi. Con questo attacco a caldo si avverte un certo odore disgustoso molto probabilmente dovuto a sostanze organiche che vengono decomposte.

Ottenuta così la soluzione di quasi tutto il ferro esistente nel fango, filtrai e lavai prima per decantazione, poi, a più riprese, sul filtro; il residuo, che era costituito da sabbia silicea fu asciugato e risultò del peso di gr. 750. Si trattava dopo questa operazione di sottoporre la soluzione tirata a secco e ripresa con acqua e acido cloridrico all'azione dell'idrogeno solforato, e qui si presentarono due quesiti: o far agire l'idrogeno solforato direttamente, o ridurre prima il sale ferrico a ferroso. Io ho creduto di non adoperare direttamente l'idrogeno solforato, perchè dato il volume ragguardevole del liquido e la grande quantità di ferro in esso contenuto, si sarebbe avuta nella riduzione una abbondante formazione di solfo, che sarebbe poi stato difficile eliminare dal precipitato, e che facilmente sarebbe stato trascinato nei gruppi successivi.

Tentai allora una riduzione elettrolitica mediante idrogeno nascente svolgentesi su di un catodo di platino posto al fondo di un alto vaso cilindrico,

(1) *Radio-activity*, London Electrician series, 1904.

mentre l'anodo di carbone rimaneva separato dal liquido per mezzo di una membrana porosa.

Abbandonai ben presto tale tentativo, non tanto perchè la riduzione avveniva lentamente e con poco esito per la forte quantità di cloro che emanava dall'anodo e da questo si spandeva sulla superficie del liquido da ridurre, quanto anche perchè sul catodo si formavano dei depositi coi quali era ammissibile si venisse a depositare o condensare in parte la sostanza attiva.

Credetti quindi opportuno di ricorrere alla riduzione del sale ferrico mediante anidride solforosa malgrado le reazioni secondarie cui questa riduzione avrebbe potuto dar luogo. E difatti, sotto l'azione di quella, si venne a formare un deposito prevalentemente costituito da solfato calcico con piccole quantità di bario e di stronzio; lo raccolsi e lo lavai con soluzione di acido solforico, quindi dopo averlo asciugato in muffola ne determinai il peso che era di gr. 85.

Scacciai in seguito dal liquido l'anidride solforosa con un getto abbondante di anidride carbonica e poi aggiunsi idrogeno solforato in soluzione, quindi continuai nella precipitazione con corrente di idrogeno solforato gassoso. Si depositò con ciò al fondo del recipiente un abbondante precipitato giallo chiaro, il quale analizzato risultò costituito da solfuro di arsenico per la massima parte e da traccie di piombo.

Lavato ed asciugato pesava gr. 19. Tirato a secco il liquido separato dai solfuri, ripreso quindi con acqua ed acido cloroidrico e fatta una ricerca su parte di questo per l'acido borico ne ebbi resultato negativo. Nel rimanente liquido feci gorgogliare del cloro a caldo per ricondurre al massimo il sale di ferro, e con ciò avvenne una nuova precipitazione di solfato calcico con silice. Il precipitato, lavato e asciutto pesava 8 gr.

Al liquido rimanente aggiunsi quindi ammoniaca con che ebbi abbondante precipitato rosso mattone che resultò costituito da ferro per la massima parte, poi manganese, alluminio ed ancora silice gelatinosa Conteneva pure traccie di fosfati, ma in cosi piccola quantità che non credetti farne la eliminazione per le successive ricerche. Pesava 280 gr.

La precipitazione di questo idrato non fu per altro completa poichè il liquido rimase leggermente colorato in giallo, e ciò facilmente si comprende quando si pensi che dovevo trattare volumi grandi di liquidi contenenti una data sostanza in grande eccesso sopra tutte le altre. Tirai nuovamente a secco la soluzione, ed eliminai i sali ammoniacali servendomi di una muffola. Il residuo ripreso con acqua ed acido cloroidrico non si sciolse del tutto, ma lasciò indietro una sostanza bianca costituita da silice e da un po' di solfato calcico. Pesava 20 gr.

Nel filtrato ripetei il trattamento con ammoniaca ed ebbi a caldo un precipitato di idrato manganoso con tracce di ferro. Pesava gr. 3.

Il solfuro ammonico precipitò dal solfuro di manganese in piccola quantità (gr. 0,5). Eliminati nuovamente i sali ammoniacali in muffola, ebbi col carbonato ammonico un precipitato costituito da solo carbonato calcico; pesava 5 gr.

La soluzione da questo separata fu tirata a secco e il residuo contenente sali di sodio, potassio e magnesio venne arroventato. Raccolto pesava 3 gr.

Separate per tal maniera in gruppi le sostanze contenute nel fango ne esaminai all'elettroscopio 5 gr. per quelle di cui vi era questa quantità. Degli altri esaminai quella che avevo a disposizione.

In un quadro riporto indicate le sostanze separate dal fango il loro peso, la quantità $^0/_{00}$, la quantità adoperata per le ricerche all'elettroscopio e l'attività loro.

Come confronto serva la dispersione di 1600 volta all'ora data da 2 decigr. di Pechblenda:

SOSTANZA	Quantità separata da gr. 1173,5 di fango	Quantità separata dal fango $^0/_{00}$	Quantità adoperata per le ricerche all'elettroscopio	Dispersione in Volta all'ora
Campione complessivo del fango	—	—	gr. 5	338,4
Residuo inattaccato dall'acqua regia (SiO^2)	gr. 750	639.08	» 5	23.7
Residuo dalla riduzione con SO^2 (contenente $BaSO^4$, $SrSO^4$, $CaSO^4$).	» 85	72,44	» 5	6.5
Solfuri (II gruppo) contenenti solfuro d'arsenico e traccie di solfuro di Pb	» 19	16.19	» 5	943.1
Residuo dall'ossidazione con cloro contenente solfato calcico + silice.	» 8	6.82	» 5	10.1
Precipitato dal III gruppo contenente Fe Al. Mn (fosfati e silice gelatinosa)	» 280	238. 6	» 5	340.0
Residuo dalla calcinazione per il IV gruppo contenente silice ($CaSO^4$ traccie)	» 20	17.05	» 5	inattivo
Precipitato del III gruppo *bis* (Mn e traccie di Fe) . .	» 3	2.56	» 3	»
Precipitato del IV gruppo contenente manganese . . .	» 0,5	0.43	» 0,5	»
Precipitato del V gruppo contenente carbonato calcico .	» 5	4.27	» 5	»
Residuo dei sali di Mg. Na K.	» 3	2.56	» 3	»
TOTALE . . .	1173,5	1000.00		

Osservando la tabella si può vedere a colpo d'occhio la qualità e l'approssimativa quantità delle sostanze contenute nel fango, ma più di tutto, riguardando la dispersione di ciascun gruppo, risulta evidente che l'attività

si è concentrata spiccatamente nei solfuri rimanendo ancora forte nel precipitato del III gruppo ed apprezzabile nei solfati pesanti (1).

Se una conclusione si dovesse trarre riguardando i gruppi separati e le loro attività rispetto alle proprietà chimiche degli elementi radioattivi sino ad ora più noti, si dovrebbe ammettere nel fango le presenza di tre o quattro elementi.

1° Nel II gruppo il *Polonio* della sig.ª Curie (2) o il *Radio-tellurio* di Marckwald (3) o il *Radio-piombo* di Elster e Geitel (4), di Giesel (5) e Hofmann e Strauss (6) che precipitano coi solfuri del II gruppo.

2° Nel III gruppo o l'*Attinio* o il *Torio*, od entrambi.

3° Nei solfati pesanti il *Radio*.

Queste considerazioni che sono di un interesse affatto particolare meritavano una conferma, che infatti ho potuto ottenere dallo studio della emanazione emessa dalle soluzioni del fango.

I metodi seguiti sono quelli che ho già rammentato proposti dal Soddy; riporto quindi senz'altro i risultati delle ricerche.

1° L'aria che sovrasta ad una soluzione dei fanghi in acqua regia lasciata a sè per dieci minuti primi ha un potere dispersivo nell'elettroscopio (Volta all'ora 19,5).

2° Togliendo via dalla campana il gas contenente l'emanazione, la velocità di dispersione decresce rapidamente e si riduce in pochi minuti ad un valore così piccolo da non esser più misurabile.

3° Dopo di aver lasciato il gas prima in un gazometro per dieci minuti primi, quindi nella campana dell'elettroscopio per trenta primi e dopo di averlo completamente scacciato si osserva che la sua presenza ha determinato una sensibile radioattività indotta (13 Volta all'ora),

4° Porzioni del gas raccolte entro un gazometro e prese alla distanza di 4 in 4 giorni hanno mostrato che il potere scaricante dell'elettroscopio si riduce a $^1/_2$ del suo valore dopo 4 giorni appunto (da Volta all'ora 19,44 a 9,69).

Da tutto ciò si può ritenere accertata nei fanghi l'esistenza del Radio.

5° Tirando fuori il gas da una bottiglia contenente una soluzione solforica dei fanghi e raccogliendo l'emanazione fresca dopo pochi minuti, poi

(1) Non tengo conto del residuo inattaccato dall'acqua regia, il quale è ancora attivo probabilmente perchè non liberato del tutto dal ferro che conteneva.

(2) P. e S. Curie, Comp. Rend. 1898, t. CXXVII, pag. 175.

(3) Markwald, Chem. Ber. 1902, t. XXXV, pagg. 2285 e 4239; 1903, t. XXXVI, p. 2662.

(4) Elster e Geitel Wied. Ann. 1899, t. LXIX, pag, 33.

(5) Giesel, Chem. Ber. 1901, t. XXXIV, pagg. 3569 e 3775.

(6) Hofmann e Strauss, Chem. Ber. 1900, t. XXXIII, pag. 3126; 1901, t. XXXIV, pag. 3035; 1902, t. XXXV, pag. 1453.

lasciando questa a sè per un minuto in un gazometro e ponendola quindi nella campana dell'elettroscopio si osserva che il gas è ancora attivo (Volta all'ora 19,8).

6° Se si carica negativamente per un'ora ad alto potenziale il dispersore dell'elettroscopio sia in una campana ove circola l'emanazione, sia anche direttamente nel vaso che contiene la soluzione o semplicemente del fango asciutto e si esamina all'elettroscopio dopo 5 o 6 ore da quando fu tolto dal recipiente, l'attività che presenta si riduce a $^1/_2$ in 11 ore e persiste ancora dopo 2 giorni (da Volta all'ora 9,4 a 4,20 a 1,08).

Da tutto ciò si può concludere per la presenza del Torio.

Devo aggiungere un'osservazione importante:

L'emanazione delle soluzioni del fango presenta una debole attività in confronto alla dispersione determinata direttamente dal fango asciutto e sembra anche che le soluzioni cloroidriche siano un po' meno attive delle solforiche.

Per quanto siano piccoli i valori della dispersione, pure i resultati da me ottenuti sono sicuri perchè l'apparecchio di cui mi sono servito poteva apprezzare con sicurezza anche dispersioni molto minori, cioè di 2 Volta all'ora.

Conclusioni.

L'analisi da me eseguita ha fatto conoscere che il fango ha una composiziono molto complessa.

L'esame all'elettroscopio dei gruppi separati dal fango ha dimostrato in esso la presenza di diverse sostanze radioattive, ed i saggi fisici sulla emanazione sono andati in accordo colle proprietà chimiche dei gruppi confermando la presenza del *Radio* e del *Torio*.

La debole attività dell'emanazione non permette per altro di concludere per la presenza o assenza dell'Attinio e rimane ancora in discussione a quale elemento sia dovuta la forte dispersione dei solfuri.

Ma poichè la separazione ha così ben corrisposto colle altre proprietà fisiche dell'emanazione complessiva del fango per due gruppi, mi credo autorizzato a ritenere che anche nel gruppo dei solfuri vi sia un altro elemento, che potrebbe essere il Polonio o uno degli altri sottoprodotti del Radio (1).

Fisica. — *Le correnti di Foucault nel nucleo conduttore interno ad un solenoide percorso da corrente alternata.* Nota di F. Piola, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) F. Soddy, *Stato attuale della radioattività.* Le Radium, III, n. 7 (giugno 1906)

Chimico-fisica. — *Sulla velocità di diffusione degli elettroliti.* Nota di G. Bruni e B. L. Vanzetti (1), presentata dal Socio G. Koerner.

Buscaglioni e Purgotti pubblicarono, circa un anno fa, un lavoro assai esteso (2) sull'argomento indicato nel titolo; essi espongono i risultati di numerosissime serie di esperienze e giungono ad alcune interessanti conclusioni. Poichè la pubblicazione ora citata è poco accessibile al pubblico, riassumeremo qui brevemente i metodi da essi seguiti ed i risultati principali.

Gli autori, seguendo quanto fu già fatto da molti sperimentatori precedenti, studiarono la velocità di diffusione in gelatina. Esperienze qualitative furono eseguite dal Buscaglioni, mediante un apparecchio da lui chiamato *tachiionoscopio*; noi ci occupiamo però principalmente delle misure quantitative eseguite dal Purgotti mediante il *tachiionometro*. Questo apparecchio, che è una modificazione del *cinetometro* di Pringsheim (3), è in sostanza costituito da un cilindro di gelatina, le cui estremità vengono messe a contatto con due soluzioni saline capaci di dare un precipitato (p. es. $AgNO_3$ e NaCl). Dalla posizione in cui si forma tale precipitato nel tubo di gelatina, si deduce la velocità relativa di diffusione delle due soluzioni. Essi giungono anzitutto alla conclusione, che nella soluzione gli ioni di un sale diffondono affatto indipendentemente l'uno dall'altro, e in appoggio a tale ipotesi essi portano specialmente il fatto che quando le due soluzioni danno luogo, reagendo, a due sali entrambi insolubili (p. es. Ag_2SO_4 e $BaCl_2$), i due setti, anzichè formarsi uniti, si depositano ben distinti ad una certa distanza l'uno dall'altro.

Essi concludono poi che la velocità di diffusione dei singoli ioni è inversamente proporzionale alla radice quadrata del loro peso relativo, ciò che equivarrebbe ad una estensione della legge di Bunsen sulla diffusibilità dei gas, alle soluzioni diluite.

Un'altra osservazione degna di esser notata è quella che soluzioni di uno stesso sale aventi concentrazioni diverse diffondono con velocità pressochè eguali, talchè lasciando diffondere p. es. da un lato la soluzione di $AgNO_3$ e dall'altro soluzioni di HCl di varia concentrazione (da triplo-normale a decinormale) il punto d'incontro non varia.

Infine essi fanno interessanti considerazioni sullo spostamento che può subire il setto di precipitato, dopo formatosi, a seconda della varia concentrazione e pressione osmotica delle due soluzioni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Scuola super. di agricoltura di Milano, 1906.

(2) Atti del R. Ist. Botan. di Pavia. Nuova serie, vol. XI (1905).

(3) Zeitschr. f. physik. Chem., *17*, 462 (1895).

Diciamo subito che a risultati concordanti con queste ultime considerazioni giunsero recentemente Bechhold e Ziegler (1); questi autori non citano affatto il lavoro di B. e P., rimasto loro evidentemente sconosciuto.

Il lavoro di B. e P. attrasse subito la nostra attenzione, soprattutto per le prime tre conclusioni, le quali appaiono stare in contradizione con talune vedute finora generalmente ammesse.

Quanto alla prima di dette conclusioni, e cioè all'ammissione della indipendente migrazione, noteremo che la sua possibilità fu sempre recisamente negata dai più autorevoli cultori della elettrochimica. W. Nernst si esprime p. es. nel modo seguente (2): « Nun verlangt aber das Grundgesetz der « Elektrostatik dass im Innern eines Leiters freie Elektrizität nicht bestehen « kann; auf Elektrolyte angewendet sagt dasselbe aus, dass die Ionen im « Innern der Lösung stets in äquivalentem Verhältniss vorhanden sein müssen. « Eine Diffusion welche dies Verhältniss ändern würde ist unmöglich... ».

Quanto al secondo punto, e cioè alla legge emessa da B. e P., secondo la quale la velocità sarebbe inversamente proporzionale alla radice quadrata del peso degli ioni, osserviamo anzitutto che essa sta in disaccordo con quanto ci è noto intorno alla velocità di migrazione degli ioni nella elettrolisi, la quale grandezza è certamente una funzione del coefficiente di diffusione degli ioni stessi. Nernst dedusse anzi, nel lavoro sopracitato, una relazione quantitativa abbastanza semplice. Ora, p. es., nella serie dei metalli alcalini la velocità di migrazione va crescendo col crescere del peso atomico (Li-33.4; Cs-68) anzichè decrescere come farebbe prevedere la legge di B. e P; lo stesso accade anche in altre serie di elementi (F-46,6; Cl 65,4).

Infine, per ciò che riguarda la indipendenza della velocità di diffusione dalla concentrazione, è chiaro che essa poteva apparire *a priori* poco verosimile.

Le esperienze di autori precedenti nelle loro misure si riferirono prevalentemente alla quantità di sale che diffonde in un tempo determinato; essi trovarono confermata abbastanza esattamente la legge di Fick, che nella forma datale da Stephan si esprime con la equazione:

$$a = cq\sqrt{\frac{k\theta}{\pi}},$$

dove sono a la quantità diffusa, c la concentrazione, q la sezione del vaso, k il coefficiente di diffusibilità e θ il tempo. Questa equazione non ci dice nulla circa le vie percorse da un elettrolita in un dato tempo; su questo soggetto abbiamo esperienze di Voigtländer (3) e di Chabry (4), secondo le quali lo spazio percorso è proporzionale alla radice quadrata del tempo.

(1) Annalen der Physik [4], *20*, 900 (1906).
(2) Zeitschr. f. physik. Chem., *2*, 619 (1888).
(3) Zeitschr. f. physik. Chem., *3*, 324 (1889).
(4) Journ. de phys. [2], *7*, 115 (1888).

Noi abbiamo quindi creduto non inutile di intraprendere alcune esperienze su questo soggetto, per tentare di chiarire taluni dei dubbi sovra esposti; noi seguimmo sempre sostanzialmente il metodo di B. e P. e dobbiamo anzi ringraziare il collega Purgotti di aver messo assai gentilmente a nostra disposizione gli apparecchi stessi usati da lui.

Anzitutto abbiamo ripetute alcune delle esperienze di Purgotti, per renderci conto del modo di operare e del grado di esattezza che si può raggiungere col metodo. Dobbiamo dire che, nei casi da noi sperimentati, siamo sempre giunti a risultati concordanti con quelli di Purgotti, sia quanto alla posizione in cui si forma il setto, sia quanto allo spostamento ed agli accrescimenti di detto diaframma dopo la sua formazione.

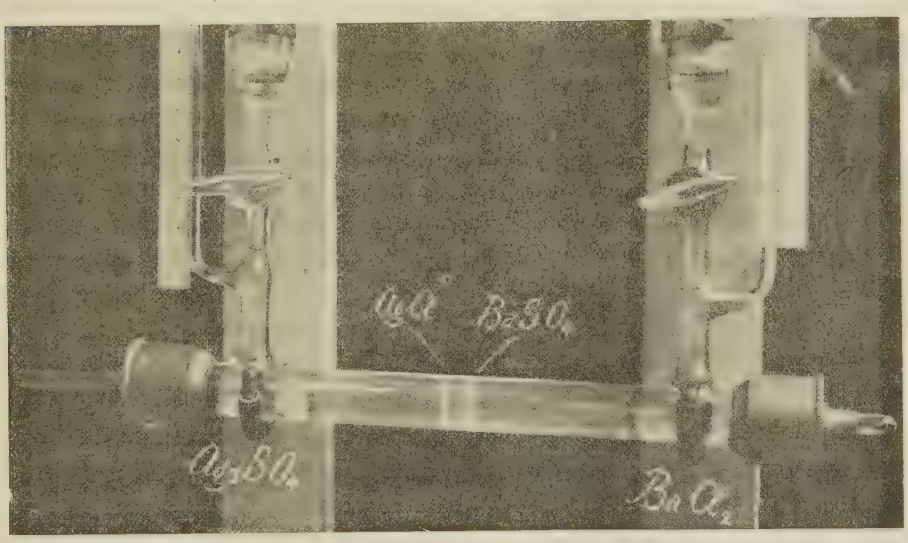


Fig. 1.

Specialmente ci preoccupammo di ripetere le ricerche con le soluzioni suscettibili di dare due diversi precipitati. Operammo con due soluzioni 0,06-normali di Ag_2SO_4 e $BaCl_2$ e con un cilindro di gelatina, al 5 %, lungo 10 centimetri. Il primo a formarsi era il setto di AgCl, il quale si depositava dopo 48 ore, a cm. 3,5 dalla estremità contenente Ag_2SO_4 e andava quindi lentamente allontanandosi da detta estremità. Il setto di $BaSO_4$, cristallino, si formava assai più tardi (5 giorni dal principio dell'esperienza) a cm. 5,4 dalla estremità suddetta, verso la quale andava poco a poco ingrossando. I due setti rimasero però sempre nettamente distinti; anche dopo 20 giorni, pure essendo aumentati entrambi di spessore, si osservava il distacco netto di circa 5 millimetri. Riproduciamo nella fig. 1 una fotografia dell'apparecchio alla fine di tale esperienza.

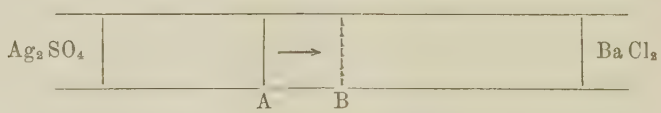
Risultati analoghi abbiamo ottenuto in un'altra esperienza fatta con un tubo lungo 20 centimetri.

Il fatto osservato da Purgotti è quindi sperimentalmente confermato e resta solo da vedere quale sia la sua interpretazione esatta. Abbiamo già detto in parte le ragioni per cui crediamo che l'ipotesi, esposta da B. e P., della indipendente migrazione degli ioni, sia difficilmente accettabile. Bisognerebbe infatti ammettere che in differenti sezioni della colonna liquida, in cui avviene la diffusione, esistessero, in quantità abbastanza considerevole, cariche elettropositive, o elettronegative in eccesso.

Dobbiamo per altro convenire che il trovare una spiegazione del tutto soddisfacente non è cosa facile. L'ipotesi più ovvia che si presenta, sarebbe quella di una idrolisi dei due sali diffondentisi, o di almeno uno di essi. Dimostreremo in seguito che la scomposizione idrolitica può effettivamente condurre a fenomeni esteriormente identici a quelli sopraccennati; nel caso speciale, ora trattato, delle soluzioni di Ag_2SO_4 e $BaCl_2$, si ha da fare però con sali che, per quanto si sa finora, tale scomposizione idrolitica non presentano, almeno in misura apprezzabile.

Un'altra ipotesi che abbiamo presa in considerazione è quella che si tratti di fenomeni di sovrasaturazione. È nota la ingegnosa spiegazione, data da Ostwald (1), della formazione di cerchi concentrici e staccati di precipitato, che si ottengono, come osservò Liesegang (2), facendo cadere una goccia di soluzione di $AgNO_3$ su una lastra di gelatina già imbevuta di bicromato potassico. Morse e Pierce emisero, a spiegazione di questo fenomeno, una ipotesi assai plausibile (3): si sa che per ogni sale, p. es. $BaSO_4$, esiste un determinato valore $C_{Ba} \times C_{SO_4} = K$ detto *prodotto di solubilità*, il quale indica il limite *metastabile* e cioè quelle condizioni di concentrazione dei suoi ioni per cui la soluzione è soprasatura ed il sale precipita, qualora siano presenti traccie di esso allo stato solido, mentre in assenza di questo la soluzione rimane omogenea; M. e P. suppongono ora che esista un altro valore, che si potrebbe chiamare *prodotto di instabilità* $C'_{Ba} \times C'_{SO_4} = K'$, il quale indica i limiti massimi di soprasaturazione del liquido e cioè il momento in cui l'equilibrio metastabile diventando *instabile* in senso ristretto, il sale deve precipitare anche senza l'intervento della fase solida.

Ci sembra che mediante questa ipotesi possa darsi una spiegazione abbastanza soddisfacente del fenomeno che ci occupa. Si può ammettere che, dal momento in cui le due soluzioni si incontrano in A, il prodotto di insta-



(1) Lehrb. d. allg. Ch., II, *2*, 778.
(2) Zeitschr. f. physik. Chem. *23*, 665 (1897).
(3) Zeitschr. f. physik. Chem. *45*, 589 (1903).

bilità del AgCl essendo minore, sia oltrepassato facilmente e si formi, di conseguenza, il setto relativo, mentre la soluzione rimane *metastabile* rispetto a $BaSO_4$. Questo sale rimasto disciolto, diffondendo ora nel senso indicato dalla freccia, va incontrando concentrazioni sempre maggiori dell'ione $Ba^{\cdot\cdot}$, che avanza in senso inverso; ad un certo punto il valore di C_{Ba} diverrà tale da superare il prodotto di insabilità ed in tal punto B, si formerà il precipitato, il quale va poi ingrossandosi, come si disse, verso il setto di AgCl.

Ci proponiamo di fare altre ricerche per decidere definitivamente tale questione.

Abbiamo poi eseguite alcune esperienze sulla velocità di diffusione del $CuSO_4$, le quali sono istruttive in vari sensi; sia circa l'influenza della idrolisi sul modo di diffondere dei sali, sia riguardo al verificarsi, o meno, della legge generale enunciata da Buscaglioni e Purgotti.

Se si lascia diffondere nel modo solito una soluzione di solfato di rame, si può seguire assai bene coll'occhio l'avanzare della soluzione azzurra; noi abbiamo però notato che innanzi a questa soluzione rameica (la cui posizione si può leggere assai nettamente sulla scala del *tachiionometro*) si trova sempre uno strato, il cui spessore va crescendo e che, pure essendo incoloro, si può osservare assai bene per la sua maggiore trasparenza e per il diverso potere rifrangente. La spiegazione si presentava assai evidente, data la natura del sale facilmente idrolizzabile; si tratta cioè dell'acido solforico libero, che procede più rapidamente del sale non idrolizzato. Per convincerci anche maggiormente di questo, facemmo avvenire la diffusione a traverso gelatina contenente fenolftaleina leggermente arrossata; si osservò che la decolorazione di questa precedeva il fronte della soluzione azzurra di tanto quanto corrispondeva allo strato suaccennato. Questo costituisce anzi un'esperienza semplice e convincente per dimostrare ad un uditorio il fenomeno dell'idrolisi. (Se si ricorrerà per ciò ad una soluzione di *cloruro ferrico*, il fenomeno sarà ancora più appariscente).

Per dare un'idea del suo andamento, riportiamo alcuni dati relativi alla velocità di diffusione di una soluzione normale di solfato di rame (a 17°):

Ore	Fronte della soluz. azzurra mm.	Fronte dell' H_2SO_4 mm.	Differenza mm.
1	3,3	5,5	2,2
3	6,5	8,5	2,0
8	11,0	14,0	3,0
11	13,5	17,0	3,5
25	21,5	26,0	4,5
33	25,0	30,0	5,0
49	30,0	35,5	5,5
59	33,0	39,0	6,0
74	37,0	44,0	7,0
83	39,5	47,0	7,5
96	42,5	50,0	7,5
117	46,0	54,0	8,0
122	47,5	56,0	8,5
131	50,0	58,5	8,5
146	53,0	62,0	9,0
168	57,0	66,0	9,0
195	62,0	71,0	9,0

Avvertiamo che mentre le misure della posizione della fronte azzurra si possono fare assai esattamente, quelle della fronte acida sono sempre approssimative, potendosi per esse avere errori di lettura fino a 1 millimetro.

Noi abbiamo fatto adunque due serie di esperienze, lasciando diffondere prima soluzioni normali di $CuSO_4$ e $BaCl_2$ e poi $CuSO_4$ con $K_4Fe(CN)_6$ pure normali. Nel primo caso, com'era prevedibile per quanto sinora s'è detto, si osservò la formazione del precipitato $BaSO_4$ sulla fronte dello strato di acido solforico e cioè sempre ad alcuni millimetri di distanza dal fronte azzurro del sale di rame; col prussiato giallo invece il setto di ferrocianuro ramico si forma esattamente in quest'ultimo punto. Sarebbe stato interessante eseguire esperienze anche con $CuSO_4$ e ferrocianuro di Bario, perchè si avrebbe avuto, verosimilmente, la formazione di due setti di precipitati distinti e staccati tra loro, come pel caso di Ag_2SO_4 e $BaCl_2$; il ferrocianuro di bario è però troppo poco solubile per poter servire a questo scopo.

Ed ecco ora i dati delle due serie di esperienze in discorso:

Fronte del rame		Posizione del precipitato	
mm. da sinistra		osservata	calcol. secondo B. e P.
$CuSO_4$ con $BaCl_2$			
I	2,8	4,45	5,44
II	3,4	4,55	
III	3,3	4,6	
IV	3,5	4,1	
$CuSO_4$ con $K_4Fe(CN)_6$			
V	3,9	3,9	6,45
VI	4,0	4,0	
VII	3,85	3,85	

Per mostrare con maggior evidenza il procedere del fenomeno, riportiamo schematicamente nella fig. 2 le posizioni delle fronti delle due soluzioni e del setto nella esperienza VII, come furono osservate ad intervalli di 24 ore.

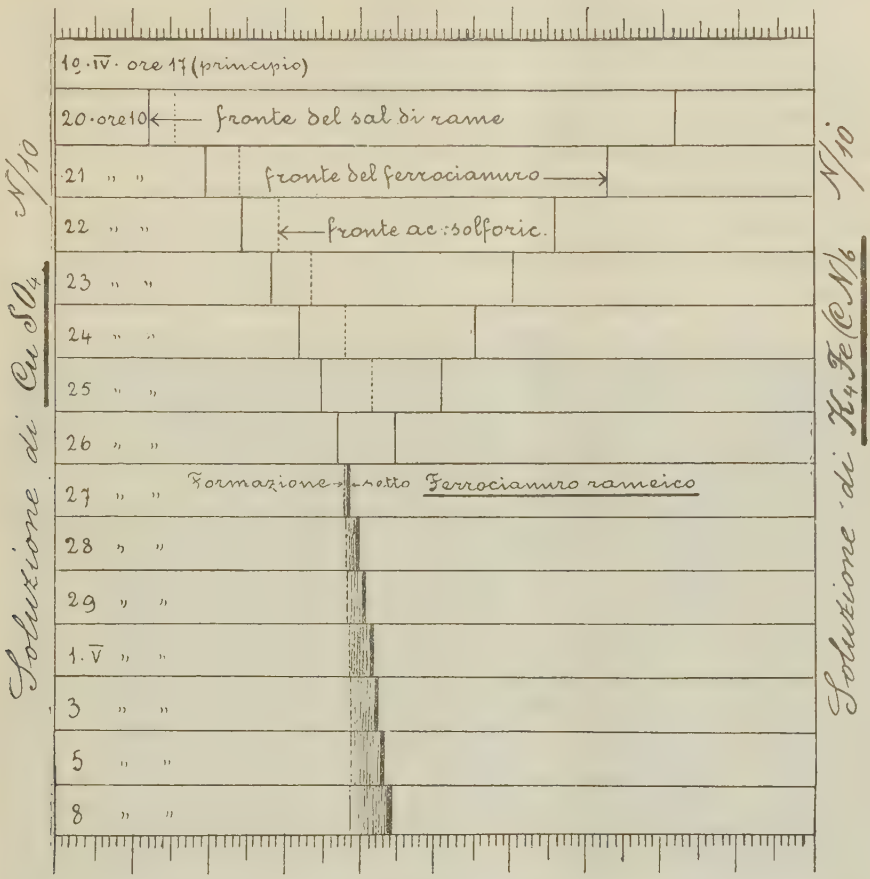


Fig. 2.

Dalla tabella riportata si vede poi che la posizione in cui si formano entrambi i precipitati non è in accordo con l'ipotesi formulata da B. e P., che la velocità di diffusione sia inversamente proporzionale alla radice quadrata del peso degli ioni, perchè detti precipitati, invece di formarsi dalla parte dell'ione più pesante, si formano dalla parte opposta.

Noteremo a questo proposito, che nelle stesse esperienze di Purgotti, accanto a fatti che stanno in accordo coi calcoli dedotti da questa ipotesi, ve ne sono alcuni che concordano meno bene ed alcuni infine che si trovano in aperta contradizione, poichè la formazione del joduro di argento avviene p. es. dalla parte dell'argento (108) anzichè da quella del iodio (127). Ci pare che in complesso si debba dire che i fatti, che parlano in favore della ipotesi di B. e P., non sono abbastanza numerosi per poter stabilire una legge, tanto meno poi, in presenza di eccezioni relativamente frequenti.

Riportiamo finalmente i risultati di alcune delle esperienze da noi eseguite per controllare la osservazione di Purgotti sul fatto che la velocità di diffusione è *almeno sul principio del fenomeno indipendente dalla concentrazione.*

Quasi tutte le esperienze sulla diffusione, eseguite dagli autori precedenti, riguardano solo la quantità di soluto che diffonde in un dato tempo e non già il *cammino* percorso dalla fronte della soluzione. Solo alcune esperienze sopra citate, di Voigtländer e di Chabry accertano che tale cammino può venire espresso abbastanza bene dalla equazione: $S = A\sqrt{\theta}$ e cioè che esso è direttamente proporzionale alla radice quadrata del tempo trascorso; della dipendenza, o meno, di tale cammino dalla concentrazione, nessuno, che noi sappiamo, si era occupato prima di Purgotti. Questo autore eseguì le sue ricerche su tale soggetto, come si disse nella introduzione, osservando il punto in cui si formava il precipitato di $AgCl$, quando diffondevano da un lato soluzioni di $AgNO_3$ e dall'altro soluzione di cloruri di diversissima concentrazione.

Noi abbiamo invece pensato di servici di composti colorati, come sono il solfato di rame, il bicromato potassico ed altri.

Per il solfato di rame lasciammo diffondere a 17° soluzioni doppio-normali, normali, $^1/_5$-normali e $^1/_{10}$-normali, con i risultati seguenti:

	2N		N		N/5		N/10	
θ tempo in min.	S_1 spazio in mm.	$\frac{S_1}{\sqrt{\theta}}$	S_2	$\frac{S_2}{\sqrt{\theta}}$	S_3	$\frac{S_3}{\sqrt{\theta}}$	S_4	$\frac{S_4}{\sqrt{\theta}}$
60	3,5	0,45	3,3	0,43	3,0	0,39	2,8	0,36
180	6,2	0,46	6,5	0,48	5,0	0,37	4,5	0,34
480	10,9	0,49	11,0	0,50	8,5	0,39	7,5	0,34
660	12,7	0,49	13,0	0,51	11,0	0.43	8,5	0,33
1500	20,5	0,51	20,7	0,53	17,0	0,44	14,5	0,37
2046	23,5	0.52	24,0	0,53	19,0	0,42	17,5	0,39
2970	28,0	0,51	28,0	0,51	25,0	0,46	22,0	0,40
3570	31,0	0,52	31,5	0,53	27,0	0,45	24,0	0,40
4425	36,0	0,54	37,2	0,56	31,0	0,47	28,0	0,42
4980	38,5	0,54	38,3	0,54	32,0	0,45	29,0	0,41
5790	41,5	0,55	41,8	0,55	35,0	0,46	32,0	0,42
6450	43,5	0,54	44,3	0,55	37,0	0,46	33,0	0,41
7320	47,0	0,55	46,3	0,54	39,0	0,46	35,0	0,41
7845	49,0	0,54	48,7	0,54	41,0	0,45	37,0	0,41
8775	52,0	0,56	51,5	0,55	43,0	0,46	39,0	0,42
10095	57,7	0,57	55,5	0,55	47,0	0,47	42,0	0,42
10710	58,5	0,56	56,5	0,54	48,0	0,46	43,0	0,41
11640	61,5	0,57	60,0	0,55	50,0	0,46	45,0	0,41

Soluzione ramica penetrata nella gelatina, espressa in gr. di solfato di rame anidro = x.

0,5644	0,3196	0,06996	0,0366

Rapporto tra la quantità entrata e la concentrazione $\left(\text{Normalità} = \frac{x}{c}\right)$

2,82	3.2	3,5	3,66

Graficamente rappresentato, il fenomeno appare con altrettanto chiara evidenza nel seguente schema:

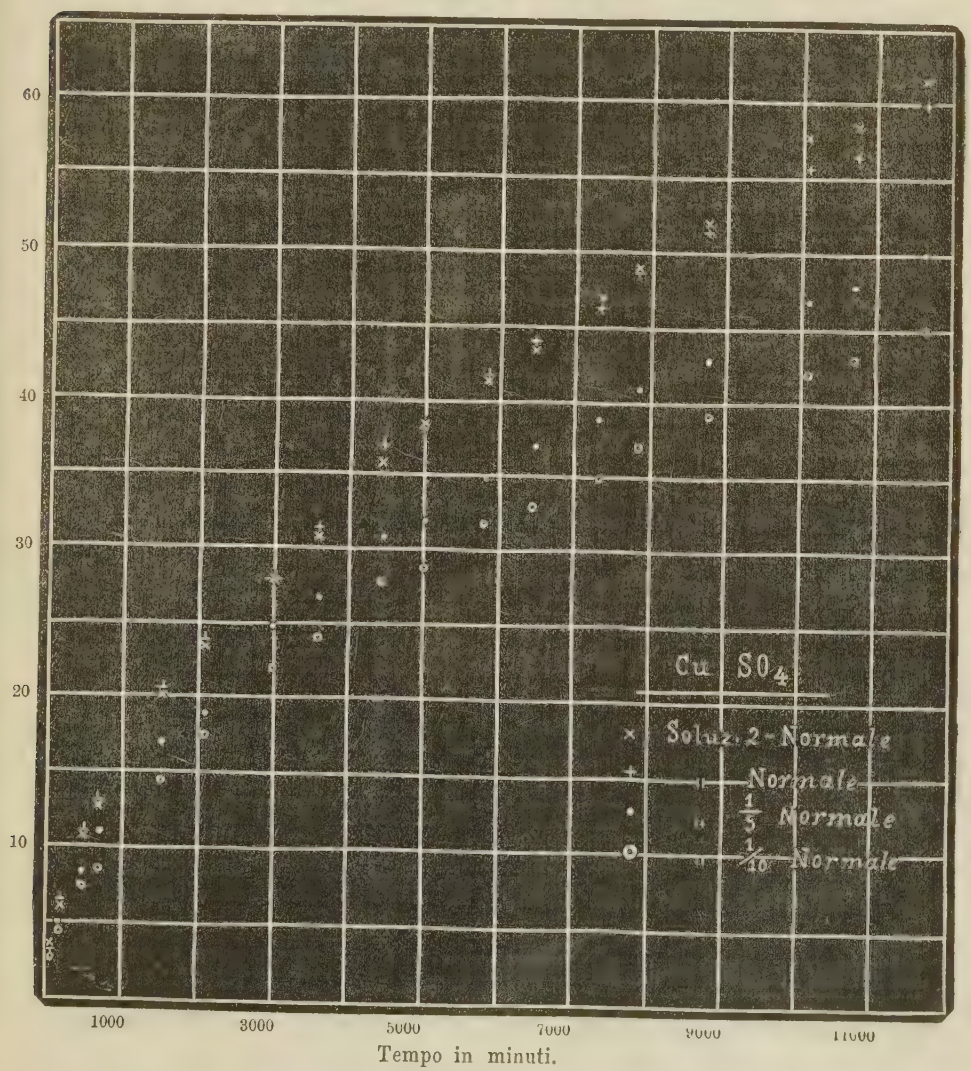


Fig. 3.

Per il bicromato potassico si lasciarono diffondere a 22° due soluzioni $N/_5$ e $N/_{10}$ con i risultati sotto riportati:

	N/5		N/10	
θ in min.	S_1	$\frac{S_1}{\sqrt{\theta}}$	S_2	$\frac{S_2}{\sqrt{\theta}}$
30	4,5	0,82	4,5	0,82
60	6,5	0,84	6,5	0,84
120	9,5	0,87	9,5	0,87
180	12,0	0,89	12,0	0,89
245	14,5	0,93	14,5	0,93
1080	32,0	0,97	31,0	0,94
2460	49,5	1,00	48,5	0,96
4110	67,5	1,00	66,0	1,00
5790	79,5	1,04	78,5	1,03
7350	90,5	1,06	90,0	1,05

Quantità in gr. di $K_2Cr_2O_7$ *penetrato nella gelatina* $= x$

$$\textit{Normalità} = \frac{x}{c}$$

0,135	0,073
6,75	7,3

Si vede che, entro certi limiti di concentrazione l'avanzarsi della solusoluzione può effettivamente dirsi indipendente dalla concentrazione stessa; così i risultati avuti con le soluzioni 2-N. e N. di $CuSO_4$ e con quelle di bicromato possono ritenersi praticamente eguali. Le due soluzioni più diluite di solfato di rame mostrano invece di procedere con notevole maggiore lentezza.

Esperienze fatte con altri sali colorati (di cobalto e di nichel) diedero risultati analoghi; in questi casi però, essendo il fronte delle soluzioni sfumato, anzichè netto come nelle precedenti, riusciva meno facile leggerne la posizione nel tubo di gelatina.

I nostri risultati concordano inoltre con quelli, già citati, di Voigtländer e Chabry, poichè il cammino percorso risulta, con sufficiente approssimazione, proporzionale alla radice quadrata del tempo trascorso.

Quanto alla quantità di sale entrata nella gelatina, le nostre analisi mostrano che essa non è proporzionale alla concentrazione delle soluzioni, ma da quelle diluite ne entra relativamente di più: e ciò dev'essere dovuto

almeno in parte al crescere della ionizzazione con l'aumentare della diluizione. Infatti il grado di ionizzazione α delle soluzioni di solfato di rame va crescendo da 0,17 per le 2-N. fino a 0,34 per quelle $N/_{10}$.

Riassumendo, i risultati principali delle nostre esperienze sono:

1. La formazione di due setti distinti, osservata da Buscaglioni e Purgotti, allorchè le due soluzioni diffondentisi possono dare due precipitati, è confermata.

2. L'interpretazione secondo cui questo fatto sarebbe determinato dalla migrazione indipendente degli ioni non appare accettabile.

3. La spiegazione del fatto suaccennato deve cercarsi piuttosto, con grande verisimiglianza, nei fenomeni di soprasaturazione.

4. Si è accertato che le esperienze di diffusione in gelatina si prestano assai bene a dimostrare la idrolisi di sali colorati.

5. La ipotesi secondo cui i singoli ioni procederebbero con velocità inversamente proporzionale alla radice quadrata del loro peso non è accettabile, essendosi trovati varî casi, che stanno con essa nettamente in contradizione.

6. L'osservazione di B. e P. che la velocità di migrazione è pressochè indipendente dalla concentrazione è confermata.

7. Sono pure confermate le esperienze di B. e P, intorno allo spostamento che subiscono i setti formatisi nella gelatina.

Fisica. — *I potenziali esplosivi ad alte pressioni. — Legge di Pachen* [1]. Nota dei dott. L. Cassuto e A. Occhialini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Secondo le moderne teorie sopra la scarica per scintilla dovrebbe esistere una notevole relazione fra il potenziale esplosivo, la pressione del gas e la lunghezza della scintilla supposta determinata in un campo uniforme.

Secondo il Towsend [2] la scarica nell'ipotesi suespressa sarebbe determinata simultaneamente dai joni positivi e da quelli negativi che urtando sopra le molecole neutre, provocherebbe la dissociazione di queste ultime; inoltre essa avverrebbe quando fra il numero α dei joni prodotti da un jone positivo mentre percorre un centimetro e quello β dei joni prodotti da un jone negativo nello stesso percorso passa la relazione

$$\alpha - \beta\varepsilon^{(\alpha-\beta)a} = 0 \qquad (1)$$

dove ε è la base dei logaritmi neperiani e a è la distanza fra le lastre che servono da elettrodi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica di Pisa diretto dal prof. A. Battelli.

(2) Phil. Mag. 6, 598, 1903.

Ora il Towsend osserva che il numero α dei joni prodotti da un jone positivo durante il percorso di un centimetro, dipende naturalmente dall'intensità del campo $\frac{V}{a}$ esistente fra le lastre e dalla densità d; ora se si aumenta la densità d in maniera da farla diventare kd, il numero degli urti diventerà k volte maggiore che nel caso precedente; però contemporaneamente la strada libera di ogni jone diventa k volte minore e quindi anche l'energia posseduta da ogni jone nel momento dell'urto, diminuirebbe nel rapporto k se non si accompagnasse l'aumento di densità con un aumento nello stesso rapporto dell'intensità del campo fra gli elettrodi.

Ne consegue che α è tale funzione di $\frac{V}{a}$ e di d, che moltiplicando $\frac{V}{a}$ e d per uno stesso numero anche α rimane moltiplicato per questo numero: in altre parole α è funzione omogenea di primo grado in $\frac{V}{a}$ e d, ossia $\frac{\alpha}{d}$ è funzione omogenea di grado zero nelle stesse variabili e quindi si può scrivere

$$\frac{\alpha}{d} = f\left(\frac{V}{a.d}\right).$$

Analogamente si ha

$$\frac{\beta}{\alpha} = \varphi\left(\frac{V}{a.d}\right).$$

Ora dalla (1) ricaviamo a:

$$a = \frac{1}{\alpha - \beta} \log \frac{\alpha}{\beta}$$

e sostituiamo per α e β i valori trovati precedentemente; si ha

$$a = \frac{1}{d} F\left(\frac{V}{a.d}\right)$$

ossia

$$V = \Phi(a.d)$$

cioè: *per un dato gas il potenziale esplosivo in un campo uniforme dipende unicamente dal prodotto della densità del gas stesso per la distanza fra gli elettrodi.*

Questa legge è stata scoperta sperimentalmente dal Pachen [1] e porta il suo nome.

2. Risulta di qui che lo studio del potenziale esplosivo ad alte pressioni ha una importanza teorica assai rilevante; giacchè le legge di Pachen offre

[1] Wied. Ann. 37, 79, 1889.

un mezzo molto semplice per sottoporre a una prova sperimentale indiretta le ipotesi ora generalmente accettate sopra il meccanismo della scarica.

Le ricerche da questo punto di vista non sono numerose perchè, a parte le ricerche classiche del Pachen già citate e quelle del Carr (1), nessun'altra contribuzione è stata portata sopra questo argomento. Infatti non sono da classificare fra queste le indagini intraprese da diversi sperimentatori per stabilire la relazione fra la lunghezza della scintilla e il potenziale esplosivo, oppure fra quest'ultimo e la pressione, perchè queste ricerche non forniscono elementi bastanti per stabilire la dipendenza del potenziale esplosivo dalla densità e insieme dalla distanza. Di più essendo in generale eseguiti con elettrodi sferici mancano alla condizione esplicita posta a base della legge di Pachen.

Gli studî sperimentali del Pachen sono stati fatti al disotto della pressione atmosferica, quelli del Carr furono spinti fino alla pressione di 5 atmosfere e ambedue trovarono la legge verificata con grande approssimazione.

Le determinazioni del Carr, fatte non solo fra limiti estesi di pressione ma variando anche molto le distanze degli elettrodi, mostrano che la forma della curva che esprime V come funzione di $a.d$ è assai prossimamente una iperbole avente gli assintoti paralleli agli assi coordinati, di modo che, per valori sufficientemente piccoli di $a.d$, i valori del potenziale V crescono rapidamente e finiscono per disporsi sopra una retta parallela all'asse delle ordinate.

4. Data l'importanza di queste ricerche, ci accingemmo ad estendere gli studî del Carr a pressioni molto elevate. Per questo costruimmo un apparecchio che essenzialmente era costituito da un robusto recipiente di ferro, nel quale si facevano scoccare le scintille fra due elettrodi piani e che è rappresentato dalla fig. 1.

Uno degli elettrodi E è attaccato a un'asta d'acciaio A, che dopo aver attraversato una serie di dischi di cuoio B sovrapposti dentro la cavità praticata su un pezzo pure di acciaio C e fortemente compressi dal premistoppa D per mezzo del dado F, si avvita su quest'ultimo.

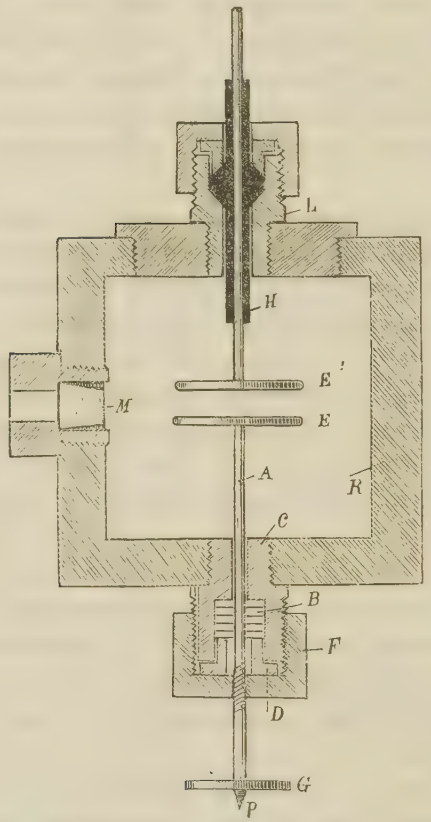
Il pezzo di acciaio C è poi avvitato sul recipiente; così l'elettrodo E è in comunicazione con la massa di quest'ultimo e si può muovere avanti e indietro girando il volano G posto all'estremità opposta dell'asta A.

L'altro elettrodo E', invece, è fisso ed isolato; esso attraversa un bastone di ebanite H secondo l'asse ed è masticiato a questo con ceralacca. Il bastone di ebanite porta verso la metà della sua lunghezza un ingrossamento e può essere stretto a tenuta nella cavità del pezzo di acciaio L col solito premistoppa.

(1) Proc. Roy. Soc. 71, 374, 1903.

Sulla parete laterale del recipiente e di fronte agli elettrodi è praticato un foro chiuso da un tappo di quarzo M, che permette di vedere nell' interno le scintille.

Per stabilire il campo uniforme nel quale doveva scoccare la scintilla, si usarono dapprima due dischi piani; ma in questo caso si notò che le scin-



tille avvenivano di preferenza sugli orli dei dischi. Cercammo di eliminare questo inconveniente verniciando con un sottile strato isolante i dischi e lasciando scoperta solamente la regione centrale, ma questo non servì a nulla; d'altra parte un rivestimento con un grosso strato isolante se era sufficiente per obbligare le scintille a scoccare fra le regioni centrali, impediva l'avvicinamento dei dischi oltre un certo limite e rendeva complicate le misure della loro distanza.

Si ebbero invece ottimi risultati facendo gli elettrodi alquanto ricolmi nel centro e verniciando gli orli. In questo caso le scintille scoccavano sempre fra i centri e nulla impediva di avvicinare gli elettrodi fino a portarli a contatto.

Inutile dire che questi elettrodi furono accuratamente centrati e che il movimento di quello mobile avveniva esattamente lungo la linea dei centri. Il diametro degli elettrodi era di 4 centimetri e lo spostamento massimo dell'elettrodo mobile era di 6 centimetri. Ma noi, come vedremo, abbiamo utilizzato solamente una piccola frazione di questo spostamento.

4. Per rendere regolari le scintille, abbiamo rinchiuso nel recipiente un pezzo di pechblenda; la macchina elettrica usata era una grande Holtz a due dischi; le esperienze furono fatte nell'aria compressa da una pompa capace di raggiungere 200 atmosfere.

Il potenziale esplosivo era determinato mediante un elettrometro del Righi, la pressione mediante un ordinario manometro metallico; in quanto alla distanza fra i due elettrodi fu misurata nel seguente modo: disposto lo spinterometro verticale, si mirava con un catetometro una punta P posta sull'estremità dell'asta che porta l'elettrodo mobile, e si faceva la lettura quando gli elettrodi erano a contatto e quando erano alla distanza da determinarsi.

Per portare gli elettrodi a contatto, dapprima guardavamo attraverso al tappo di quarzo le scintille che avvenivano fra gli elettrodi e avvicinavamo quello mobile all'altro fino a farle sparire; allora giudicavamo che il contatto era avvenuto.

Però trovammo più sicuro adoperare per questa operazione una pila, i poli della quale si mettevano in comunicazione con gli elettrodi dello spinterometro attraverso a un galvanometro. L'avvicinamento degli elettrodi si faceva cautamente fino al momento in cui il galvanometro accusava, con una violenta deviazione, il contatto.

La misura della distanza degli elettrodi fatta con questo metodo riusciva della massima precisione, e ogni osservazione isolata era affetta da un errore medio che non superava il $^1/_{100}$ di millimetro.

Il catetometro usato è un ottimo apparecchio costruito dal Nöe e permette la lettura fino al $^1/_{200}$ di millimetro.

5. Il procedimento generale delle esperienze era il seguente: l'elettrodo posto in comunicazione con la massa del recipiente, veniva messo a terra, mentre l'altro elettrodo si manteneva in comunicazione con un polo della macchina elettrica, di cui l'altro polo era al suolo.

Così disposte le cose si comprimeva l'aria nel recipiente fino alla pressione di 100 atmosfere circa e si regolava la distanza degli elettrodi in modo da lasciare scoccare le scintille: letto il potenziale corrispondente, si lasciava sfuggire da un rubinetto l'aria per diminuire la pressione, poi si allontanavano gli elettrodi finchè il potenziale esplosivo non era ritornato uguale a quello della lettura precedente; così si continuava per pressioni decrescenti,

variando sempre la distanza in modo da mantenere il potenziale esplosivo costante.

6. Nelle tabelle seguenti riportiamo due serie di risultati; in esse la prima colonna contiene il potenziale esplosivo V espresso in unità arbitraria (divisioni della scala), la seconda la densità d del gas, nella terza la distanza a degli elettrodi e nell'ultima il prodotto $a.d$.

V	d	a	$a.d$
185	102.0	0.10	10.20
185	87.0	1.12	10.44
185	70.0	0.16	11.20
185	54.0	0.20	10.80
185	46.0	0.24	11.04
185	37.0	0.28	10.36
185	23.1	0.42	9.70
185	14.1	0.76	10.43
185	1.6	6.32	10.11
		media	10.69

V	d	a	$a.d$
140	92.0	0.14	12.88
140	75.0	0.18	13.50
140	63.0	0.20	12.60
140	52.0	0.24	12.48
140	42.0	0.30	12.60
140	32.0	0.34	10.88
140	16.1	0.66	10.63
140	11.1	0.90	10.35
		media	12.03

In queste misure non ci fu possibile ottenere grandi variazioni del prodotto $a.d$ come sarebbe stato desiderabile, giacchè a 100 atmosfere la distanza esplosiva era di $^1/_{10}$ di millimetro, ossia tale da non permettere una ulteriore diminuzione. Quindi per variare fra limiti più estesi il prodotto $a.d$ non c'era altra via che diminuire l'intervallo delle pressioni, o adoperare una macchina più potente; ma il vantaggio che si sarebbe ottenuto sarebbe

stato assai discutibile, perchè nel primo caso si sarebbe diminuito il campo dell'osservazione, nell'altro si sarebbe aumentata la distanza fra gli elettrodi in modo da non rendere più ammissibile l'ipotesi che il campo elettrico fra di essi fosse costante.

7. Per giudicare della precisione delle nostre determinazioni, vediamo di quali errori sono affette le nostre misure.

La misura della pressione era fatta con l'approssimazione di $^1/_{10}$ di atmosfera e quella della distanza era affetta da un *error medio* di $^1/_{100}$ di mm. Il prodotto $a.d$ conseguentemente è, per quanto riguarda le misure, approssimato a meno del 10 %. Per conservare nella misura dei potenziali quest'ordine di approssimazione, sarebbe bastato fare la lettura dell'elettrometro a meno di 14 divisioni della scala; ma nel fatto la misura di V era assai più precisa, perchè era approssimata a meno del 3 %. Osservando allora che i diversi valori del prodotto $a.d$ dati dalle tabelle non si discostano dalla media di più del 10 %, si conclude che *la legge di Pachen nell'intervallo fra la pressione atmosferica e quella di 100 atmosfere è verificata nei limiti degli errori di osservazione.*

Chimica. — *Intorno all'azione della luce sopra le ossime* [1]. Nota di R. Ciusa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Ciamician e Silber studiando l'azione della luce sull'o- e p-nitrobenzalantiossima, osservarono che esse si trasformano nelle rispettive sin-ossime.

Gli stessi autori [2] avendo esposto la m-nitrobenzalantiossima sospesa in benzolo alla luce per un mese, non osservarono nessun cambiamento apparente nel contenuto del tubo, e, aperto questo, trovarono che la sostanza sospesa nel benzolo fondeva a 119°, e quella che si otteneva dalle acque madri fondeva a 118°. Il punto di fusione dell'α-ossima pura essendo 121°, conclusero che in questo caso non era avvenuta alcuna trasformazione.

Per rendersi conto di questo differente comportamento dell'α-m-nitrobenzaldossima rispetto alla α-o-nitrobenzaldossima e α-p-nitrobenzaldossima, prepararono col metodo di Beckmann la β-m-nitrobenzaldossima, per la quale trovarono 95-100° per punto di fusione, e che sospesa in benzolo ed esposta alla luce (11-26 maggio) dette un prodotto che fondeva a 118-119°.

In base a questi risultati Ciamician e Silber conclusero come segue: « L'ossima più stabile dell'aldeide m-nitrobenzoica, la forma fumaroide, « è quella che fonde a 118-119°, oppure 121°, secondo il suo grado di pu-

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica agraria dell'Università di Bologna.
[2] Rendiconti Acc. dei Lincei, XII, 2°, 532; Berichte, *36*, 4270.

« rezza; essa è inalterabile alla luce. Col metodo di Beckmann essa si tra-
« sforma in parte nella forma malenoide, nell'antiossima, che in questo caso
« è assai instabile e non potè finora essere ottenuta che mescolata all'altra.
« Il nostro prodotto che fondeva a 95-100°, ne conteneva evidentemente di
« più di quello avuto da Goldschmidt. Questa antiossima si trasforma alla
« luce nella sinaldossima come negli altri due casi da noi studiati. L'ossima
« della m-nitrobenzaldeide che fonde a 121°, sarebbe dunque la forma fu-
« maroide ossia la sinaldossima, e non l'altro isomero come venne finora
« ammesso dagli autori.

« Questa interpretazione dei fatti *non può però ancora essere conside-*
« *rata come definitiva*, e per risolvere la questione sono necessarie ulteriori
« esperienze fatte non solamente sulle aldossime m-nitrobenzoiche, ma anche
« sui loro eteri e derivati carbanilici ».

Benchè dunque questo parere fosse stato emesso con le massime riserve H. Goldschmidt (1) credette dover far osservare come fosse errata la conclusione a cui erano giunti i sudetti autori, che l'ossima che si ottiene direttamente dalla m-nitrobenzaldeide e fondente a 121-122° è veramente la antiossima, e che l'ossima che si ottiene trasformando la antiossima col metodo di Beckmann è la sinossima e fonde non già a 95-100° ma a 118-119°, ed è nelle proprietà fisiche e chimiche differente da quella fondente a 121-122°.

Il fatto poi che la m-nitrobenzsinossima si è trasformata alla luce nella antiossima è spiegato da Goldschmidt colla instabilità delle sin-ossime aromatiche (2). Se però la m-nitrobenzsinossima si trasforma per semplice riscaldamento completamente nella antiossima, alla luce questo non avviene. Ciò sarà detto meglio più avanti.

Per desiderio del Prof. Ciamician ho continuato io le ricerche sull'azione della luce sulle ossime, ed in primo luogo ho ripetuto le esperienze di Goldschmidt, e posso asserire che le cose stanno effettivamente come egli afferma.

Come ho già accennato in una mia Nota precedente l'α-m-nitrobenzalantiossima si comporta alla luce normalmente e si trasforma nella sin-ossima corrispondente. Lo stesso avviene per la m-nitroanisaldossima e per la p-clorobenzaldossima.

La benzalantiossima e la piperonalantiossima rimangono invece inalterate. Parrebbe quindi che, perchè avvenga il passaggio dalla antiossima alla sinossima, sia necessaria la presenza di un gruppo negativo nella molecola dell'aldeide.

Furono poi esposte alla luce la benzalsinossima e la m-nitrobenzalsinossima. La prima si trasformò quasi completamente nella antiossima, ciò che sta molto probabilmente in relazione col fatto che la benzalantiossima non

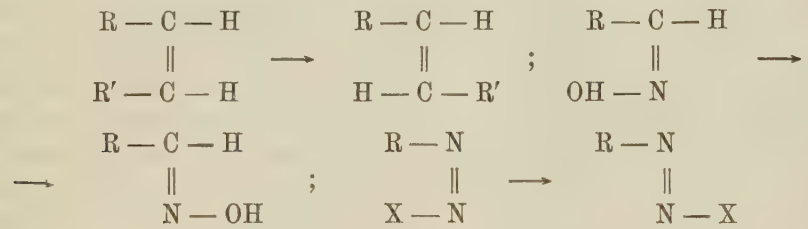
(1) Berichte, 37, 180.

(2) A. Hantzsch. Grundriss der Stereochemie, pag. 127 e segg.

passa alla luce a sinossima. La seconda rimase dopo sei mesi di insolazione per il 53 % inalterata.

Il passaggio però della benzalsinossima nella antiossima non è dello stesso ordine del passaggio alla luce delle tre nitrobenzalantiossime, della p-clorobenzalantiossima e della m-nitroanisantiossima nelle rispettive sinossime. Quest'ultimo è perfettamente analogo da una parte a quanto avviene per gli acidi maleico, angelico, ed allocinnamico che alla luce si trasformano rispettivamente negli acidi fumarico, tiglico e cinnamico, e dall'altra parte a quanto avviene per i composti sindiazoci, che alla luce si trasformano negli anti-diazoderivati (1).

Esso sta in altre parole in relazione col fatto che le stereoisomerie dipendenti dal doppio legame fra carbonio e carbonio, fra carbonio e azoto, e fra azoto e azoto sono dello stesso ordine ed hanno molte proprietà comuni, fra le quali quella, che pare oramai sufficientemente dimostrata, che le forme malenoidi si trasformano alla luce nelle fumaroidi.



m-Nitrobenzalantiossima. PF. 121-122°.

Gr. 30 di m-nitrobenzalantiossima sospesi in 300 gr. di benzolo furono esposti alla luce dal 18, VI, al 30, VI. Il contenuto del tubo già dopo un giorno andò sciogliendosi e contemporaneamente cominciarono a depositarsi dei cristalli giallicci. Dopo dodici giorni il tubo era pieno di tali cristalli. Aperto il tubo si separarono i cristalli (20 gr.) dal resto del liquido. Per evaporazione spontanea del benzolo si ebbero 10 gr. di una sostanza bianca cristallina. Il punto di fusione delle due porzioni era molto vicino rispettivamente 118° e 119°. Gr. 5 della prima porzione furono sciolti in 15 cc. di alcool assoluto in cui precedentemente erano stati sciolti gr. 0,8 di sodio, ed alla soluzione si aggiunsero gr. 4 di cloruro di benzile. Dopo due ore il tutto si rapprese in una massa di cristalli che dall'alcool si ebbero sotto forma di paglie gialle caratteristiche. Questo etere benzilico fonde a 150°, è pochissimo solubile in alcool ed è identico all'etere benzilico della m-nitrobenzalsinossima già preparato da Goldschmidt che trovò 148° per il suo punto di fusione (2).

(1) Questi Rendiconti, pag. 136.

(2) B. *23*, 2174, vedi anche Neubauer A., *298*, 188.

gr. 0,1592 di sost. diedero 15,8 cc. di azoto, misurato a 25° e 760 mm.

$NO_2C_6H_4CH-N-CH_2C_6H_5$ (O) Calc. 10,93 Trovato 11,07

Il rendimento in etere benzilico fu quantitativo: i cristalli che si erano separati erano dunque la β-m-nitrobenzaldossima, formatasi per azione della luce dalla α-ossima.

La sostanza che si ebbe per evaporazione spontanea del benzolo era l'α-ossima inalterata. Infatti per azione del cloruro di benzile in presenza di alcoolato sodico dà un etere benzilico oleoso, come è infatti l'etere benzilico dell'α-mnitrobenzaldossima (1).

m-Nitrobenzalsinossima. PF. 118-119°.

3 gr. di m-nitrobenzalsinossima sospesi in 30 gr. di benzolo furono esposti alla luce dal 23, VI, al 10, XI. I cristalli giallicci che si trovavano al fondo del tubo fondevano a 110-118°, pesavano gr. 1,6, ed erano costituiti da m-nitrobenzalsinossima inalterata. Infatti trattati con cloruro di benzile in presenza di alcoolato sodico fornirono gr. 2,1 di etere fondente a 150° e costituito dalle paglie gialle caratteristiche dell'etere benzilico della β-nitrobenzaldossima. Il benzolo da cui si separò la sinossima diede per evaporazione spontanea una sostanza bianca cristallina che altro non era che α-ossima, perchè non diede l'etere benzilico caratteristico.

La m-nitrobenzalsinossima rimase dunque per il 53 % inalterata (2).

Benzalantiossima. PF. 33°.

48 gr. di benzalantiossima cristallizzata vennero sciolti in 100 cc. di bezolo (la soluzione avviene con forte raffreddamento del miscuglio) ed esposti alla luce dal 25, V, all'11, VII. La soluzione ingiallì ma si mantenne limpida. Evaporato il benzolo nel vuoto rimase una sostanza oleosa. La ricerca della benzalsinossima fu fatta come segue: in una prima prova si sciolsero 5 gr. del residuo nella più piccola quantità di soda a freddo, e nella soluzione fortemente diluita e raffreddata si fece passare una corrente di anidride

(1) Berichte, *23*, 2174.

(2) È ovvio far notare come molto probabilmente anche nelle esperienze di Ciamician e Silber la m-nitrobenzalantiossima si era trasformata nella sinossima corrispondente; come pure è naturale che avendo i suddetti autori esposto alla luce una sinossima fondente a 95-100° (e quindi formata da un miscuglio di sin- e antiossima) abbiano ottenuto un prodotto fondente a 118-119°. Infatti nel poco tempo che durò l'insolazione la sinossima rimase inalterata, mentre la antossima si trasformò in sinossima, sì che nel tubo non rimase che sinossima fondente a 118-119°.

carbonica; in queste condizioni anche piccole quantità di β-ossima avrebbero dovuto precipitare (1). Non si ottenne invece alcun precipitato. In una seconda prova 5 gr. del residuo furono trattati colla quantità calcolata di cloruro di benzile in presenza di etilato sodico. Anche in questo caso si ottenne solamente l'etere benzilico oleoso dell'α-ossima. L'etere benzilico della β-ossima fonde invece a 81-82° (2).

Benzalsinossima. PF. 128-130°.

Gr. 15 di benzalsinossima sospesi in 75 cc. di benzolo furono esposti alla luce dal 25, V, al 25, VII. I cristalli della β-ossima si sciolsero lentamente: dopo 28 giorni erano completamente sciolti ed il contenuto del tubo, leggermente ingiallito, rimase limpido. Aperto il tubo ed evaporato il benzolo nel vuoto fu separata la sinossima col metodo su accennato. In tutto si ebbero solamente 3 gr. di sinossima inalterata. Il resto era antiossima. Infatti aggiungendo alla soluzione alcalina cloruro di benzoile ed agitando per un'ora si ottennero 20 gr. del derivato benzoilico fondente a 101°, come fonde il derivato benzoilico della antiossima (3).

La benzalsinossima si trasforma però anche per semplice riscaldamento nella antiossima, come è già noto. Scaldando 2 gr. di benzalsinossima sospesi in 50 cc. di benzolo in tubo chiuso a 100° si ottenne 1 gr. circa di sinossima inalterata: il resto era antiossima. Infatti il derivato benzoilico fondeva a 101°.

Piperonalantiossima. PF. 112° (4).

30 gr. di piperonalantiossima furono sospesi in 100 gr. di benzolo ed esposti alla luce dal 22, VI, al 20, VIII. Il benzolo si era colorato in giallo-bruno, ed alle pareti del tubo era rimasta aderente una crosta cristallina di color bruno. Aperto il tubo si separarono per filtrazione i cristalli, ed il benzolo fu evaporato nel vuoto: rimase una sostanza fondente a 112° (α-ossima). La parte solida fu stemperata con pochissimo etere: per diluizione dell'etere con ligroina si ottennero degli aghetti fondenti a 112°. Le ultime porzioni rimaste indisciolte nell'etere furono trattate allo stesso modo e si ottenne ancora la stessa sostanza fondente a 112° (5).

(1) Behrend e König, Annalen der Chemie, *263*, 356.

(2) Beckmann Berichte, *22*, 435.

(3) G. Minunni e G. Corselli, Gazzetta chimica, *22*, 2°, 167.

(4) La piperonalsinossima fonde a 146°. Angeli e Rimini, G. *26*, 1°, 11; Hantzsch, Ph. Ch. *13*, 526.

(5) Allo scopo di studiare l'azione della luce sull'o-nitropiperonalossima fu preparata quest'ultima come segue: 6 gr. di o-nitropiperonale (A. 159, 134; Haber, B. *24*, 624; Ciamician e Silber, R. Acc. L. *11*, 1ª, 280; E. Mameli, R. Acc. L., *14*, 2ª, 424) sciolti in 100 cc. di alcool, furono scaldati a ricadere con gr. 2,5 di cloridrato di idrossilamina. Quasi subito cominciò a formarsi un precipitato giallo abbondante che finisce per impe-

m-Nitroanisaldeide e *m-nitroanisaldossima.*

La m-nitroanisaldeide fu preparata col metodo di E. Wörner, aggiungendo anisaldeide (una mol.) a piccole porzioni per volta ad un miscuglio di acido nitrico conc. (una mol.) e di acido solforico conc. (20 mol.) in modo che la temperatura non oltrepassi 0°. Dopo un'ora si versa il miscuglio in molta acqua, e l'aldeide che si separa si cristallizza dall'alcool (1). Il punto di fusione trovato da me è molto differente da quello trovato da E. Wörner e da Einhorn e Grabfield (2), rispettivamente 72° e 83°,5. Io ho trovato 86-87°

gr. 0,1416 di sost. diedero gr. 0,2749 di CO_2 e gr. 0,0517 di H_2O
gr. 0,1320 di sost. diedero 9,6 cc. d'azoto (25°,754 mm)

C_6H_3(OCH$_3$, NO$_2$, CHO)

Calc. C.: 53,03 ; H: 3,86 ; N: 7,73
Trovato » 52,94 ; » 4,05 ; » 8,04

Il fenilidrazone fonde a 130° come trovarono Wörner e Einhorn.

Il p-nitrofenilidrazone fu preparato mescolando le soluzioni alcooliche bollenti dei componenti. Precipita immediatamente l'idrazone sotto forma di squamette piccolissime rosso-granato. Cristalli pochissimo solubili in alcool, etere, etere acetico, cloroformio e acido acetico anche a caldo, molto in acetone. Fu cristallizzato da un miscuglio di alcool ed acetone.
Gr. 0,1939 di sost. diedero 30,8 cc. d'azoto (26°,766 mm.)

$(OCH_3)(NO^2)C_6H_3CH:N.NHC_6H_4NO_2$ Calc. N 17,72; Trovato 17,77.

Fonde a 244° e quando è perfettamente secco è giallo, si colora invece immediatamente in rosso vivo appena tolto dall'essiccatore.

L'ossima della m-nitroanisaldeide non era ancora nota. Io l'ho preparata come segue:

Gr. 5 di aldeide sciolti in 50 cc. di alcool furono scaldati a ricadere per un'ora con 2 gr di cloridrato di idrossilamina. Per raffreddamento il

---

dire l'ebullizione. Si sospende quindi il riscaldamento e dopo raffreddato si filtra. Si cristallizza l'ossima da molto alcool e si ottiene una sostanza gialla costituita da aghetti piccolissimi fondenti a 212°. Haber (B. *24*, 625), che non dà il metodo di preparazione, trova 203°. Questa ossima si scioglie negli alcali con colorazione giallo bruna, pochissimo solubile anche a caldo in tutti i solventi.
gr. 0,1832 di sost. diedero 22,6 cc. d'azoto (30°-762 mm)

$CH_2O_2C_6H_3$(NO$_2$, CH:NOH) Calc. N 13,33 Trovato 13,42.

Data la grande insolubilità a freddo di questa ossima in tutti i solventi ne fu abbandonato lo studio.

(1) Berichte, *29*, 157.

(2) Annalen der Chemie, *243*, 37.

miscuglio si rapprende in una massa di cristalli bianchi aghiformi sericei. Quest'ossima è poco solubile a freddo nell'alcool e nel benzolo, molto a caldo, solubilissimo in etere e acetone. Si scioglie negli alcali con colorazione giallo-rossastra. Cristallizzata sino a punto di fusione costante dà all'analisi i seguenti risultati:

Gr. 0,1750 di sost. dànno 22,6 cc. d'azoto (27°,768 mm.):

$(CH_3O) . (NO_2) C_6H_3 CH : NOH$ Calc. N : 14,28; Trovato 14,41

Fonde a 170°.

Col metodo di Beckmann fu preparata la m-nitroanissinossima, che si ottenne dal benzolo in aghetti leggermente giallognoli poco solubili nei solventi ordinari e fondenti a 168-170°.

Gr. 0,1522 di sost. diedero 19,4 cc. d'azoto (21°,760 mm.):

$(CH_3O) (NO_2) C_6H_3 CH : NOH$ Calc. 14,28; Trovato 14,51.

Come si vede il punto di fusione della β-ossima è in questo caso, come per la β-m-nitrobenzaldossima, molto vicino a quello della α-ossima. Ho creduto perciò necessario preparare l'etere benzilico delle due ossime isomere.

Etere benzilico della m-nitroanisantiossima.

Gr. 5 di antiossima si sciolsero in 10 cc. di alcool assoluto in cui si era sciolto precedentemente gr. 1 di sodio; alla soluzione si aggiunse la quantità calcolata di cloruro di benzile e si riscaldò a bagno maria per circa un'ora a 70°-80°. Per raffreddamento si separano dei cristalli duri incolori che furono cristallizzati da pochissimo alcool sino a punto di fusione costante.

Gr. 0,1796 di sost. diedero 15,7 cc. d'azoto (20°,758 mm.).

$(CH_3O) NO_2 C_6H_3 CH : NO . CH_2 C_6H_5$ Calc. 9,78 Trovato 9,92.

Questo etere benzilico fonde a 124° ed è abbastanza solubile nei solventi ordinari anche a freddo, e cristallizza dall'alcool in forma d'aghetti bianchi lucenti.

Etere benzilico della m-nitroanissinossima.

Si prepara come il precedente. Il miscuglio della reazione si rapprende in una massa di cristalli gialli, che furono cristallizzati da molto alcool sino a punto di fusione costante.

Gr. 0,1086 di sost. diedero 9,5 cc. d'azoto (20°,760 mm.).

$(OCH_3) (NO_2) . C_6H_3 CH : NOCH_2 C_6H_5$ Calc. 9,78; Trovato 9,98.

Questo etere fonde a 195°, è pochissimo solubile in alcool freddo, poco a caldo, e dal quale si separa in aghetti sottilissimi gialli.

Esperienze alla luce.

Gr. 5 di m-nitroanisantiossima sospesa in 30 cc. di benzolo furono esposti alla luce dal 30, VIII, al 18, IX. Aperto il tubo si separarono per filtrazione i cristalli giallognoli dal benzolo. I cristalli finamente polverizzati e secchi furono senz'altro trattati colla quantità calcolata di cloruro di benzile in presenza di etilato sodico. Si ebbero così gr. 1,5 di etere benzilico fondente a 195° costituito dagli aghetti gialli caratteristici e corrispondenti a gr. 1,1 di m-nitrosinossima. Dal benzolo filtrato si ottenne soltanto α-ossima inalterata come fu dimostrato trasformandola nel rispettivo etere benzilico. L'ossima trasformata fu in questo caso la quinta parte circa della totale.

p-Clorobenzalantiossima PF. 110° (1).

Gr. 7 di p-clorobenzalantiossima sospesi in 14 cc. di alcool assoluto furono esposti alla luce dal 15, V, 1903, al 10, XII, 1903. Alla fine dell'insolazione nel tubo si avevano al fondo dei cristalli grossi colorati in giallo bruno e sospesi nella soluzione dei cristalli fini aghiformi. I cristalli grossi furono separati meccanicamente dal resto e fondevano a 143°-145°; cristallizzati rapidamente dal benzolo si ebbero degli aghi bianchi fondenti a 146°.

All'analisi si ebbero i seguenti risultati:

Gr. 0,1772 di sost. diedero gr. 0,3790 di CO_2 e gr. 0,0724 di H_2O.

Cl_6H_4CH Calc. C 54,03; H 3,87
$\|$
NOH Trovato » 53,69; » 4,54

Erdmann e Schwechten (2) trovarono per punto di fusione dell'anti- e sinossima rispettivamente 106-107° e 140°.

Gli aghi sospesi nell'alcool furono filtrati: fondevano a 130-132° ed erano molto probabilmente identici ai cristalli precedenti, ma meno puri.

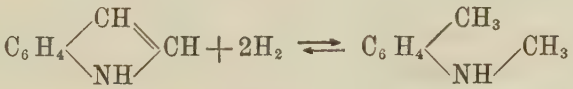
Per evaporazione spontanea dell'alcool, colorato in giallo-bruno, si ebbero dei cristalli fondenti dopo una cristallizzazione dal benzolo a 102°, ed erano quindi molto probabilmente p-clorobenzalantiossima inalterata.

(1) Le esperienze sulla p-clorobenzaldossima furono eseguite da Ciamician e Silber; ed è stato per loro desiderio che ne comunico i risultati in questa mia Nota.

(2) Annalen, *260*, 63.

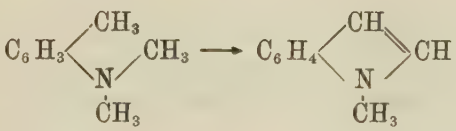
Chimica. — *Sopra un nuovo metodo di preparazione dell'n-metilindolo.* Nota di O. Carrasco e M. Padoa (1), presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente (2) noi abbiamo dimostrato come si possa, valendosi dell'azione catalitica del nickel, ottenere l'apertura del nucleo indolico, e, reciprocamente, come si possa dalla metil-o-toluidina ottenere indolo. Unico fattore delle due reazioni inverse l'una dell'altra, è la temperatura: a circa 200° si apre il nucleo indolico, a 300-330° la base nominata perde idrogeno e dà indolo.



Una volta ottenuti questi passaggi con l'indolo, e principalmente la sintesi, era da tentare di ottenere per la stessa via i suoi omologhi; questi tentativi formano l'argomento della presente Nota, e diedero in parte buoni risultati.

Era da prevedere che dalla dimetil-o-toluidina si formasse dell'n-metilindolo:



ed infatti l'esperienza ha confermato la nostra previsione.

La dimetil-o-toluidina (che gentilmente ci venne fornita dalla Badische Anilin- u. Soda-Fabrik) venne fatta passare goccia a goccia in un tubo, della lunghezza di circa 60 cm., che conteneva il nickel ridotto, riscaldato a 300-330°.

Al prodotto ottenuto, che dava fortemente le reazioni degli indoli, venne aggiunto tanto acido cloridrico da renderlo lievemente acido; in seguito, distillando in corrente di vapore, passò il prodotto indolico con traccie di nitrili. Il distillato venne estratto con etere, dibattuto con potassa, seccato e concentrato; il residuo etereo fu distillato a pressione ordinaria e passò quasi tutto costantemente a 240°. Si ebbe così un liquido oleoso, di odore indolico caratteristico; il picrato ottenuto da questo liquido fuse a 149-150°

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Questi Rendiconti, 1906, I, 699.

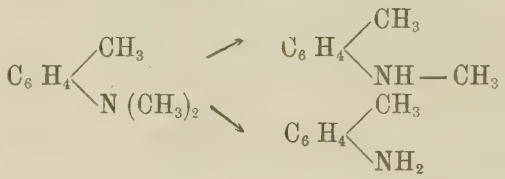
come quello dell'n-metilindolo ottenuto da E. Fischer e Hess (1) partendo dal metilfenilidrazone dell'acido piruvico.

L'analisi del nostro picrato diede i seguenti risultati:

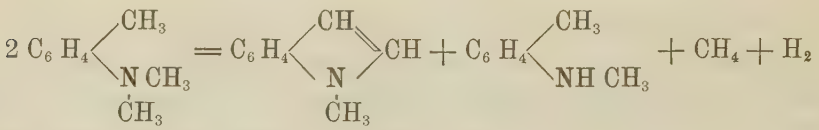
	Calcolato per $C_9H_9N.C_6H_2(NO_2)_3OH$	Trovato
C	49.97	49.69
H	3.35	3.76

Ciò che rimase dopo la distillazione in corrente di vapore del prodotto primitivo, fu filtrato per eliminare poche resine che erano in sospensione, e trattato con nitrito sodico. Estraendo con etere, separammo i nitriti delle basi secondarie: e potemmo così identificare la *metil-o-toluidina*, formatasi in piccola quantità.

La soluzione acquosa, riscaldata, svolse parecchio azoto e vi trovammo notevole quantità di *cresolo* proveniente da *toluidina*. Evidentemente, oltre che n-metilindolo si formano queste due toluidine per smetilazione parziale o completa della dimetil-o-tolnidina:



Immaginando che l'idrogeno liberato nella formazione dell'indolo vada ad attaccarsi ai metili che si staccano dall'azoto, si deve ammettere la formazione contemporanea di metano. Così si avrebbe ad esempio:



Noi non abbiamo fatta l'analisi dei gas sviluppati; piuttosto ci siamo curati di aumentare il rendimento del metilindolo. Facendo l'operazione nel modo descritto ottenemmo un rendimento del 6 % sulla dimetiltoluidina adoperata; con una semplicissima modificazione siamo riusciti ad innalzarlo dal 6 al 24 %: basta far passare una corrente di idrogeno insieme alla dimetiltoluidina. Le ragioni di questo fatto non sono facili a comprendere, tanto più se si consideri che la formazione del metilindolo avviene con eliminazione d'idrogeno, e che quindi in ogni caso dovrebbe essere così favorito il processo di smetilazione. Forse l'azione dell'idrogeno è quella di

(1) Berichte, XVII, 562.

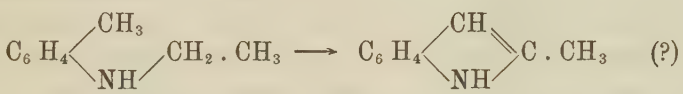
mantenere libera la superficie del nickel da qualche corpo che altrimenti vi si deporrebbe, diminuendone l'attività.

Sperammo di poter aumentare nello stesso modo il rendimento dell'indolo dalla metiltoluidina (Carrasco e Padoa, l. c.): senonchè il risultato ottenuto non fu così soddisfacente come per l'n-metilindolo; riuscimmo soltanto a portare il rendimento dal 6 all'8 %.

Ad ogni modo, considerato il costo dei prodotti di partenza, e la facilità dell'operazione, crediamo che i metodi di sintesi da noi esposti, tanto per l'indolo come per l'n-metilindolo, siano consigliabili anche come metodi di preparazione.

Nei due casi da noi descritti non si tratta evidentemente di reazioni paragonabili a quelle comunemente chiamate pirogeniche; infatti ricordiamo che von Baeyer e Caro [1] facendo passare delle aniline sostituite attraverso canne roventi, ottennero sempre indolo; mentre che per noi i risultati sono diversi volta per volta a seconda delle aniline impiegate.

Così secondo le nostre previsioni avrebbe dovuto formarsi del metilchetolo dalla etil-o-toluidina:



Infatti si poteva pensare che se anche da principio si fosse formato un anello esatomico, e cioè la chinolina, questa a sua volta sarebbe passata a metilchetolo [2]. Senonchè le nostre esperienze non ci hanno dato in questo caso risultati sicuri; ottenemmo bensì dalla etil-o-toluidina prodotti di carattere indolico, in piccola quantità; ma non ci fu possibile separarne alcun indolo allo stato di purezza; riscontrammo invece la formazione di molta toluidina proveniente dal distacco del gruppo etilico dall'azoto.

Chimica. — *Sulla funzione acida del biossido di nichelio.* Nota di I. Bellucci e S. Rubegni, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Berichte, X, 1262.

(2) Padoa e Carughi, questi Rendiconti, 1906, II, 113.

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia sarda. Il giacimento di azzurrite del Castello di Bonvei, presso Mara, con alcune osservazioni sulla formazione dei carbonati di rame naturali* (1). Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Struever.

È nota la presenza di giacimenti metalliferi nelle rocce trachitiche della Sardegna di Nord-Ovest, nella regione compresa fra Bosa e Alghero sul mare, Pozzomaggiore ed Ittiri nell'interno, che abbraccia gran parte del circondario di Alghero. Detti giacimenti furono campo di ricerche scarse e finora poco fortunate e rappresentano un sistema metallifero ben distinto, assai più recente e con ogni probabilità più povero degli altri della Sardegna. Dal lato scientifico questi giacimenti, la maggior parte finora sconosciuti o quasi, sembrano presentare una certa importanza, e perciò ben volentieri ho colto l'occasione di visitare, con la cortese guida del cav. Pinna-Parpaglia, sindaco di Pozzomaggiore, una ricerca di minerale cuprifero da lui coltivata in località Castello di Bonvei nel territorio di Mara. Tale località si trova circa a mezza strada fra Pozzomaggiore e Monteleone e quindi quasi nel mezzo della regione testè accennata.

In questa i vari giacimenti metalliferi si trovano nelle trachiti o in relazione con esse: di alcuni si hanno cenni fugaci o incidentali in opere di indole generale (2); Iervis (3) ne parla un po' più diffusamente e ne enumera parecchi, facendo risaltare anche le analogie di alcuni di essi con quelli tanto noti di Schemnitz e Kremnitz in Ungheria. Bertolio (4) ne cita incidentalmente uno interessante con rame nativo cristallizzato in cubi ed altri minerali a Pala de s'Osastru fra Ittiri e Villanova Monteleone, ma soltanto G. de Angelis d'Ossat (5) ci ha dato recentemente uno studio com-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) Vedi: Barelli V., *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*. Torino, 1835; Baldracco G., *Cenni sulla costituzione metallifera della Sardegna*. Torino, 1854; Sella Q., *Sulle condizioni dell'industria mineraria in Sardegna*. Roma, 1871; Sella Q., *Sui giacimenti metalliferi di Sardegna*. Boll. R. Com. Geologico, Firenze, 1871. Zoppi G., *Descrizione geologico-mineraria dell'Iglesiente*. Roma, 1888.

(3) Iervis G., *I tesori sotterranei dell'Italia*. Parte III, Torino, 1871, pag. 133 e seg.

(4) Bertolio S., *Contribuzione allo studio dei terreni vulcanici di Sardegna*. Roma, Boll. R. Com. Geol., XXVII, 1896, fasc. 2.

(5) De Angelis d'Ossat G., *Filoni metalliferi nelle rocce trachitiche della Sardegna Occidentale*. Torino, Rassegna Mineraria, XXI, 1904, fasc. 1, 2, 3.

pleto con metodi e vedute moderne di un gruppo di essi, cioè di quelli presso il mare nella zona a nord di Bosa: questi portano in prevalenza minerali di piombo e di zinco, mentre nel giacimento presso Mara, di cui mi accingo a parlare, prevalgono i minerali di rame: anzi il minerale più abbondante, quasi l'unico che sia estratto in rilevante quantità nelle ricerche fin qai eseguite, è l'azzurrite.

Il percorso da Pozzomaggiore al Castello di Bonvei è molto istruttivo, perchè giova ad acquistar subito conoscenza della costituzione geologica di questa parte della Sardegna.

Predominano in questo tratto le rocce calcaree e formano le colline, che costituiscono tutta la regione: sono i soliti sedimenti miocenici tanto comuni in Sardegna. Nel fondo delle vallette l'erosione ha messo qua e là allo scoperto la grande massa di rocce trachitiche e andesitiche, di quelle rocce che il Lamarmora chiama trachiti antiche, cioè sicuramente anteriori ai sedimenti miocenici. La sommità delle colline, specialmente nelle immediate vicinanze di Pozzomaggiore, porta invece spesso gli avanzi delle colate basaltiche più recenti, che si distesero sulle assise calcaree.

Il giacimento cuprifero si trova sul fianco nord-est della ripida collina sulla cui sommità sono i ruderi dell'antico Castello di Bonvei, e precisamente nel punto denominato Cadis, e per quanto i lavori appena iniziati permettono di accertare, si presenta come uno strato o meglio come parecchi straterelli di azzurrite, mista a poca malachite, intercalati in una argilla limonitica. Al riposo di questi strati si trova una trachite-andesitica (1) di color rossastro molto alterata con numerosi interclusi feldspatici in prevalenza plagioclasio e con biotite come rappresentante più abbondante degli elementi colorati ferromagnesiaci. Questa roccia non presenta traccia di mineralizzazione, la quale sembra invece interessare un'altra varietà di trachite-andesitica (2), che costituisce la collina aguzza, specie di grande spuntone roccioso, che porta le rovine del castello: questa roccia, che si accosta assai

(1) Adotto, seguendo in ciò il Riva ed altri autori giustamente ritrosi a creare nuovi nomi senza un'assoluta necessità, tale denominazione per indicare delle rocce, che, pur avendo un contenuto in anidride silicica abbastanza alto, presentano in prevalenza interclusi di feldspato plagioclasio piuttosto basico. Non entro in maggiori particolari intorno a questa roccia e all'altra varietà che accennerò in seguito, perchè tale non è lo scopo del presente lavoro, e perchè siffatti particolari troveranno il loro luogo adatto in uno studio petrografico di rocce consimili della Sardegna settentrionale, che sto preparando.

(2) Tale roccia è ricordata dal Lamarmora (*Voyage*, parte III, tom. I, pagg. 593-594) e da lui assimilata alle rocce del Monte Cucumia e di Osilo, nel gruppo da lui chiamato delle trachiti anfiboliche e fonolitiche di età più recente; queste rocce, che del resto inesattamente furono da lui così denominate, non hanno niente a che vedere con la presente. È vero che il Lamarmora dice di non aver osservato da vicino la roccia del castello di Bonvei e di essere stato indotto a stabilire tale analogia dalla simiglianza delle forme di questa collina con i monti di Olladiri e di Osilo.

più della precedente alle vere trachiti, è di color grigio con massa fondamentale ricca di microliti feldspatiche e di sferoliti calcedoniose (quest'ultime molto probabilmente di formazione secondaria, come di formazione secondaria sembra il poco quarzo, che si trova in detta massa), con interclusi feldspatici meno numerosi che nella roccia precedente e anche qui in prevalenza plagioclasici, e con anfibolo in grandi e abbondanti individui fra gli elementi di prima generazione.

Una grossa dicca di materiale siliceo, specie di quarzite compatta, che sembra iniettare anche quest'ultima roccia, forma il legame fra essa e gli strati argillosi con azzurrite, con i quali viene a contatto. Sopra questi strati e contro la collina trachitica vengono a morire gli ultimi lembi del calcare, che forma, come ho detto, l'ossatura delle colline circostanti e ricopre quasi dapertutto la trachite-andesitica rossastra, che sembra costituire la roccia fondamentale della regione.

Nel giacimento il minerale più abbondante è l'*azzurrite* e con lavori ancora superficialissimi se ne è estratta già una quantità assai rilevante: gli straterelli, che essa forma nell'argilla ferrifera, hanno in media una potenza di due decimetri circa, ma uno di essi raggiunge il mezzo metro. In gran parte presenta una forma di struttura, che finora si è riscontrata più comunemente nella malachite, cioè la struttura concentrico-lamellare; si trova quindi in sferoidi o pallottole compatte, a volte sciolte nell'argilla e indipendenti l'una dall'altra, a volte aderenti appena tangenzialmente fra di loro, a volte invece compenetrate in modo da costituire una tipica forma mammellonare o reniforme o una specie di pisolite. Tutte queste varietà di struttura dipendono dalla maggiore o minor quantità di materiale argilloso, che circonda il minerale e che vi è anche intimamente commisto; negli strati superiori del giacimento, dove prevale l'argilla, si hanno sferoidi di varia grandezza isolati o appena uniti fra loro o masse di apparenza pisolitica; dove l'argilla diminuisce, il minerale è aggruppato in straterelli o in masse a struttura mammellonare compatta. Anche le dimensioni delle pallottole sono in relazione con la purezza maggiore o minore del materiale, che le costituisce; le più grandi raggiungono i 3 cm. di diametro e sono formate da un minerale poco puro e molto argilloso, le più piccole e le masse a struttura mammellonare sono molto più pure. Per di più, quando esse si spezzano, mostrano la parte esterna dura compatta poco pura, mentre nella parte centrale si nota generalmente un piccolo vuoto tappezzato di cristallini lucentissimi, ma piccolissimi; quando questa specie di geodina non esiste, sempre la parte centrale è costituita di azzurrite pura con distinta struttura cristallina. Gli infimi straterelli di azzurrite, quelli che vengono a contatto con la trachite-andesitica rossastra, che costituisce il letto del giacimento, non hanno più ganga argillosa, ma baritica.

Qui la *baritina* si trova in massa compatta biancastra o in nn confuso

intreccio di lamine o anche in minuti cristalli laminari con le forme }001{, }100{, }102{, }011{ e }110{; con essa l'azzurrite è sempre in aggregati di piccoli cristalli, più grandi di quelli che tappezzano le geodine piccolissime degli sferoidi, ma ancora troppo piccoli e poco adatti per uno studio cristallografico: del resto è in questo strato che, col progredir dei lavori, vi ha probabilità di trovare bei campioni cristallizzati, sì di azzurrite che di baritina. *Malachite* terrosa o compatta accompagna l'azzurrite, ma in quantità assai più scarsa: dove si presenta come una patina più o meno sottile sulle sferulette di azzurrite o dove sostituisce completamente le minori di esse, è evidentemente epigenetica, ma questo non è il caso più frequente. Per lo più accompagna l'azzurrite mostrando di essersi formata indipendentemente da essa: così masserelle di malachite sono completamente racchiuse da altre più grandi di azzurrite freschissima e vengono alla luce solo con la rottura di queste. Quindi nella maggior parte dei casi risulta evidente la simultaneità della formazione dei due carbonati basici di rame.

I lavori superficialissimi finora eseguiti non hanno portato alla luce che pochi campioni di solfuri (*calcopirite* e *bornite*); questi verosimilmente si devono trovare in maggior quantità nelle parti più profonde e probabilmente nella dicca quarzosa che sta, come dissi, fra gli strati con azzurrite e la trachite-andesitica grigia della collina.

Iervis [1] fece già rimarcare le analogie dei giacimenti di Capo Marargiu presso Bosa con quelli dell'Ungheria (Schemnitz e Kremnitz); de Angelis d'Ossat [2] fece note le analogie di molti giacimenti, pure in quel di Bosa con quelli della Tolfa in provincia di Roma. In verità, per l'età geologica e per le rocce con le quali è in relazione, il giacimento del Castello di Bonvei trova riscontro in Europa soprattutto con i giacimenti dell'Ungheria, già citati; ma, se si pon mente alla natura dei minerali e alle loro condizioni di reciproca giacitura, si osserva che esso ha grande somiglianza con quello tanto celebre ed ora esaurito di Chessy e S. Bel presso Lione. A parte l'età geologica, perchè cotesto giacimento si trova in terreni più antichi, le analogie mineralogiche e litologiche sono marcatissime. Leggasi la descrizione della miniera di Chessy data da J. A. Raby [3] e si vedrà che essa si trova al limite tra formazioni secondarie (buntsandstein e calcare giurassico) e formazioni più antiche (schisti cristallini, granito ecc.): che le *mines jaunes* (piriti cuprifere) si trovano in una roccia eruttiva profonda, che il citato autore denomina afanite: che le *mines noires* (rame nativo e prodotti vari di ossidazione) si trovano fra detta afanite e i piani del secondario e l'azzurrite con malachite si trova negli strati di arenaria e più specialmente poi in uno speciale strato di argilla limonitica (*argille ferrugineuse*). Al

(1) Loc. cit., 134.
(2) Loc. cit., 18.
(3) Annales des Mines, (trois. sér.), t. IV, 1835, p. 393.

disopra di esso si trova il calcare non mineralizzato. Secondo Leymerie (1) la roccia, che Raby chiama afanite, sarebbe un porfido in relazione col granito e De Lapparent (2) definisce questa roccia *une roche amphibolique, qualifiée de diorite.*

A Chessy come al Castello di Bonvei, il materiale più abbondante nella parte superiore del giacimento è l'azzurrite e subordinatamente la malachite e desso materiale si trova prevalentemente in una argilla limonitica: in ambedue i giacimenti il minerale solfurato è più profondo ed in relazione con una roccia eruttiva: in ambedue gli strati ad azzurrite sono sormontati da calcare non mineralizzato, il quale evidentemente deve aver fornito il carbonato di calcio necessario per la trasformazione dei sali solubili di rame. Analogie si possono osservare anche nel modo di presentarsi dell'azzurrite; mancano purtroppo nel giacimento di Sardegna le stupende cristallizzazioni, che resero universalmente noto quello di Francia, ma conviene pure notare che, mentre non è esclusa la possibilità di trovare anche a Bonvei bei cristalli nel filoncello baritico della parte più profonda appena appena esplorato, anche a Chessy d'altronde, secondo le indicazioni di Raby, le druse con bei cristalli erano in minima quantità rispetto alla gran massa del materiale azzurritico, il quale (si noti la perfetta analogia con quanto ho scritto poc'anzi per l'azzurrite di Bonvei) si presentava in pallottole sferoidali dure compatte per lo più vuote nel centro negli strati superiori argillosi, e in masse compatte parallelamente stratificate nella parte inferiore, cioè nell'arenaria. Infine, per quel che riguarda la roccia eruttiva, con la quale si trovano in relazione i minerali solfurati profondi, si può osservare che, stando alla definizione datane dal De Lapparent, quella di Chessy, a parte l'età e la struttura diversa, presenta delle affinità chimiche e mineralogiche con quella del Castello di Bonvei.

Che, se del nostro giacimento di Bonvei si voglia conoscere l'età, bisogna tener conto che la trachite-andesitica con anfibolo, la quale, o come concentrazione magmatica, o come deposito di estrazione magmatica lungo la zona di contatto (e allo stato attuale dei lavori tale questione secondaria non si può risolvere) porta i minerali cupriferi profondi, sembra abbia fatto intrusione dentro la trachite-andesitica rossastra più antica. Perciò si deve certamente ritenere la mineralizzazione posteriore all'estravasione delle trachiti più antiche, ma forse sempre anteriore alla deposizione del calcare miocenico. Analogamente concluse de Angelis d'Ossat circa l'età dei giacimenti affini al nord di Bosa (3).

(1) Neues Jahrb. für Min., 1835, p. 520.

(2) De Lapparent, *Traité de géologie*, III edit., tom. II, 1893, pag. 1481.

(3) Un altro giacimento, non ancora noto nella scienza e che si trova in condizioni abbastanza simili a quello del Castello di Bonvei, ebbi occasione di visitare: esso si trova in località *Su Terru ruiu* nel territorio di Keremule sui fianchi delle colline che limi-

Che i sali solubili di rame, formatisi per il rimaneggiamento dei varî minerali solfurati profondi, possano reagire con i carbonati, più comunemente con quello di calcio, formando i carbonati basici di rame, è cosa notissima: e non v'ha alcun dubbio, che a tale origine si debba attribuire la maggior parte dei depositi di questi carbonati, specie quando sono alquanto estesi: chè questa volta geologia e chimica, caso che non sempre s'avvera, sono d'accordo, l'una nel porre l'ipotesi semplicissima e naturalissima, l'altra nell'avvalorarla con le sue leggi e con il risultato delle esperienze. Ciò che, a quanto io sappia, è rimasto ancora alquanto oscuro, è il perchè si formi piuttosto l'uno che l'altro di detti carbonati di rame.

La malachite è certamente più frequente e si può spiegare la sua maggior abbondanza per il fatto, che, delle due, è la specie più stabile e che l'azzurrite si trasforma agevolmente in essa per scambio di anidride carbonica con acqua, come è provato dalle frequenti pseudomorfosi dell'una sull'altra. Ma quando, come al Castello di Bonvei, come a Chessy e in molte altre località, si è di fronte ad una grande quantità di azzurrite mista a malachite in quantità assai minore; quando, come al Castello di Bonvei, soltanto pochissima parte di quest'ultimo minerale si può considerare come epigenetica, l'altra risultando evidentemente di formazione simultanea o anche anteriore all'azzurrite, allora il problema di scoprire in quali condizioni si formi a preferenza l'uno o l'altro dei due minerali, si impone. Di qui nacque in me il proposito di tentare di risolverlo sperimentalmente.

A tal uopo era naturale, che io cercassi di riprodurre artificialmente l'azzurrite, come quello dei due minerali che più difficilmente si ottiene in tal modo, mentre è notissimo che la malachite fu ottenuta agevolmente in più modi, fra gli altri in quello descritto, anche nei più elementari trattati di chimica, di far reagire una soluzione di un sale ramico con una soluzione di un carbonato qualsiasi: era anche logico, che io cercassi di riprodurre nelle esperienze le condizioni naturali, almeno in quanto ciò fosse possibile; perchè è certo, che molti metodi, proposti per ottenere i minerali artificiali, presentano il lato debole di impiegare mezzi che quasi sicuramente non operano in natura, e quindi poco giovano alle nostre cognizioni sulla minerogenesi. Le esperienze quindi da me disposte sono quasi tutte, per così dire,

---

tano a ponente la pianura del Campo Giavesu. Quivi, in un conglomerato calcareo-argilloso con abbondanti ciottoli di trachite, si osservano alcuni filoncelli di malachiteamista a poca azzurrite in una ganga argillosa con steatite. Questi, che hanno andamento all'incirca verticale, sembrano ingrossarsi in profondità, mentre vanno a perdersi in alto, dove detto conglomerato sopporta il solito calcare miocenico in questo punto molto fossilifero. La roccia eruttiva, che ha dato luogo a questa piccola manifestazione metallifera, qui non affiora in nessun punto ed è rappresentata solo dai ciottoli abbondantissimi nel conglomerato.

a lunga scadenza, e di esse darò conto, se avranno esito felice, e se permetteranno di trarne risultati concludenti. Mi limito ora ad accennarne talune abbastanza persuasive, che ho potuto effettuare in breve tempo, data la loro semplicità.

Debray (1) ottenne azzurrite facendo agire una soluzione di nitrato ramico su frammenti di creta in tubo chiuso a temperatura ordinaria, ma con pressione di circa 7 atmosfere; Becquerel (2) ebbe lo stesso risultato immergendo pezzi di creta dapprima in una soluzione neutra di nitrato ramico e in seguito in una soluzione di bicarbonato di soda; Michel (3) fece agire lungo tempo sotto la pressione ordinaria una soluzione di nitrato ramico con dei pezzi di spato d'Islanda ed ebbe così azzurrite in piccolissimi cristalli e gerhardtite. Come si vede, questi tre metodi non diversificano molto fra di loro; di un quarto parlerò in appresso.

Io ho adoperato e il solfato e il cloruro ramico, ma solo con quest'ultimo mi sono fino ad ora riuscite esperienze concludenti: in un tubo di vetro del calibro di circa un cm. posi dapprima un grammo di cloruro ramico idrato (con 2 molecole d'acqua di cristallizzazione) premendolo leggermente contro il fondo in modo da stringerlo e costiparlo nel minor spazio possibile: sopra di esso disposi uno straterello di circa un cm. di caolino in fina polvere, ben premuto anch'esso, e quindi vi introdussi due grammi di carbonato sodico idrato (con 10 molecole d'acqua) in polvere; dopodichè chiusi il tubo alla lampada e lo collocai in una stufa. Con questa esperienza mi ero proposto un duplice scopo: quello di mettere in azione una certa pressione, quale è quella esercitata dall'anidride carbonica che si sviluppa, e l'altro di far agire da solvente soltanto l'acqua di cristallizzazione dei due sali, giacchè precedenti esperienze mi avevano convinto che, per pochissima quantità d'acqua che si aggiungesse, sempre si veniva alla formazione di sola malachite. Lo strato di caolino interposi fra i due sali, non solo per imitare in ciò le condizioni naturali di molti giacimenti di azzurrite, ma anche, e soprattutto, per permettere alle soluzioni di attraversarlo lentamente e quindi di agire lentamente e gradatamente l'una su l'altra: e ciò perchè in esperienze precedenti avevo accertato, che, ad una immediata e pronta reazione, seguiva sempre formazione di malachite. La esperienza descritta fu da me ripetuta parecchie volte variando un poco le condizioni di temperatura e di durata della medesima; ed eccone i risultati complessivamente esposti.

Col riscaldamento tanto il cloruro ramico che il carbonato sodico perdono dell'acqua, la quale scioglie una parte di essi sali, e le soluzioni così formate tendono a mescolarsi attraverso lo strato di caolino: si nota che

(1) Comptes rendus Ac. Sc., XLIX, 1859, pag. 218.

(2) Idem, LXIII, 1866, pag. 1.

(3) Michel M. L., *Sur la production artificielle de l'azurite et de la gérhardtite*, Bull. Soc. Min. de France, XIII, 1890, pag. 139.

questo è attraversato più rapidamente dalla soluzione di cloruro di rame, tanto che dopo un certo tempo (più o meno lungo a seconda della minore o maggiore temperatura) si osserva che avviene la reazione al contatto fra caolino e carbonato sodico. Se la temperatura si mantiene fra 50° e i 65°-70°, si vede in questo contatto formarsi della malachite e si può attraverso le pareti del tubo assistere al lentissimo progredire di uno strato verde, che tende ad invadere tutta la massa del carbonato sodico: con una attenta osservazione pare di poter accertare, che la parte estrema di questo strato, quella al contatto con il carbonato sodico, sia sfumata in azzurro; forse anche in queste condizioni si comincia a formare azzurrite, ma lo stato di essa è così transitorio, che non si può dimostrare.

Se si porta la stufa ad una temperatura superiore ai 70°, mantenendola all'incirca fra i 75° e gli 85° si forma rapidamente della azzurrite poco al di là del contatto fra la malachite già prodottasi e il carbonato sodico, nella massa stessa di esso carbonato. Se allora si interrompe l'esperienza e si spezza il tubo, si possono raccogliere dei piccoli, ma distinti cristallini di azzurrite, che al microscopio mostrano allungamento secondo l'asse di simmetria, ma forme non determinabili: si può accertare, che si è formata azzurrite, dove le prime molecole di soluzione cuprica vennero a reagire col carbonato sodico in grande eccesso, mentre all'indietro (cioè verso l'estremità del tubo che contiene il cloruro ramico), dove questo sale potè affluire in maggior quantità, si è formata malachite. Se, dopo aver tenuto il tubo per qualche ora sugli 80°, lo si lascia chiuso per molti giorni alla temperatura ordinaria, si vede che continua lentamente a formarsi della malachite, non più della azzurrite; anzi parte di questa tende a scomparire trasformandosi in malachite.

Dalla suddetta esperienza è lecito arguire che si formi azzurrite, quando il cloruro ramico reagisce con un eccesso di carbonato sodico in presenza di anidride carbonica e ad analoga conclusione può portare per il nitrato ramico quella già citata da Becquerel: che esistano poi dei limiti netti di temperatura al di sopra o al di sotto dei quali non avvenga formazione di azzurrite, io non oserei asserire. È bensì vero che nei miei esperimenti ho veduto formarsi il minerale soltanto a temperatura fra i 75° e gli 85°, ma con altri metodi, come dissi, si è pure ottenuta azzurrite a temperatura ordinaria.

Per concludere, pur considerando la mia esperienza come un semplice tentativo di risolvere il problema propostomi, e perciò, pur andando molto cauti nell'applicarne i risultati ai fenomeni naturali, credo per altro si possa per ora ritenere probabile, che una delle condizioni necessarie per la formazione in natura dell'azzurrite sia la presenza di anidride carbonica e di un eccesso di carbonato rispetto al sale di rame; in altre parole, ad esempio, che la soluzione cuprica si trovi con un eccesso di carbonato acido di calcio,

come sto tentando di provare sperimentalmente con esperienze, che ho, preparate, e di cui darò conto se riusciranno felicemente.

È probabile anche che in natura, quando le soluzioni cupriche si trovano in contatto con dei calcari molto argillosi, la presenza dell'argilla influisca sulla formazione dell'azzurrite, facendo in modo che i sali di rame vengano a reagire molto lentamente e quindi in minima quantità; e per di più, mescolandosi intimamente col minerale mentre esso si forma, è probabile che ne impedisca, con la sua impermeabilità, l'ulteriore evoluzione in malachite. Con ciò si verrebbe ad ammettere come condizione necessaria per l'esistenza di un rilevante deposito di azzurrite la presenza di uno strato argilloso, nel quale si dovrebbe sempre trovare tale minerale, almeno quando è in grande quantità; tale condizione infatti si verifica a Chessy e al Castello di Bonvei. Non sono a mia disposizione gli elementi per conoscere, se anche nei giacimenti americani e australiani, dove pure si trova tale minerale in quantità rilevante, si verifichi tale condizione.

Per ultimo devo accennare ad una esperienza di F. Wibel (1), dai cui risultati detto autore trasse argomento per alcune considerazioni sulla formazione dell'azzurrite in natura. Egli espose per circa 24 ore ad una temperatura dai 150° ai 180° un tubo di vetro di Boemia contenente una soluzione poco concentrata di solfato di rame con frammenti di marmo, ottenendo dopo l'esperienza una patina verde di malachite sul marmo; lasciando in seguito il tubo chiuso a temperatura ordinaria per otto giorni, vide formarsi dei cristallini di gesso e una parte superficiale della malachite trasformarsi in azzurrite. Ne dedusse che si era formata azzurrite dalla malachite per assunzione di anidride carbonica e perdita d'acqua. Pur non negando la possibilità di una tale trasformazione (e citerò a questo proposito il fatto ricordato da Rogers (2) di antichissime monete cinesi con patina di malachite sopra la quale si era formata azzurrite) non credo che si possa, come fa il Wibel, generalizzare il fenomeno e ritenere che l'azzurrite si formi in natura per trasformazione di malachite, mentre i fenomeni di paragenesi e di pseudomorfosi fanno evidente nella maggior parte dei casi il passaggio inverso.

(1) Neues Jahrbuch f. Min. etc., 1873, pag. 242.
(2) Amer. Geologist, XXXI, 1903, pag. 43.

Geologia. — *Il miocene del Monte Titano nella Repubblica di San Marino.* Nota di Bindo Nelli, presentata dal Socio C. De Stefani.

Molti geologi si sono occupati della formazione calcarea del M. Titano, ed in questi ultimi anni specialmente il prof. Capellini, il quale ci offrì un'estesa bibliografia sulla regione (1).

Le più varie opinioni sono state espresse intorno all'età di tale formazione, in base a studi stratigrafici e paleontologici, essendo stata riferita ora all'eocene, ora al miocene inferiore, anche recentemente, o medio, o superiore; per ciò non ho creduto inutile accingermi allo studio dei fossili del calcare del M. Titano, che si trovano nel Museo di Paleontologia degli Studi superiori di Firenze.

Furono raccolti dal compianto dott. Manzoni, da lui in parte studiati in un suo lavoro paleontologico e stratigrafico, nel quale conclude potersi ritenere la formazione calcarea del M. Titano appartenente al miocene inferiore ed all'eocene superiore (2).

Questi fossili sono molto abbondanti nella roccia costituente il M. Titano, che è un calcare compatto, principalmente costituito da *briozoi*, specialmente da una *Cellepora*, prima ritenuta un *Porites*. Questi briozoi colle loro colonie venivano ad avvolgere in una fitta maglia calcarea gli altri corpi d'origine organica cioè Molluschi, (fra i quali predominano in gran parte i *Pettini*) numerosi Echini e Foraminifere ed altri materiali inorganici, studiati anche recentemente dal Salmoiraghi (3), che venivano ad accumularsi nel fondo del mare. Dall'esame della roccia apparisce manifesta la mancanza assoluta delle *nullipore*.

La presenza poi di abbondanti rappresentanti del *Nekton*, di Cetacei (4) e di Squali; l'abbondanza degli Echini, i Brachiopodi ed i Pectinidi indicano una certa profondità di mare.

Se consideriamo poi l'aspetto litologico come la costituzione completamente organogenica della roccia, si riscontra una grande somiglianza coi cal-

(1) G. Capellini, *Balenottera miocenica del Monte Titano, Repubblica di San Marino* (Mem. R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, 24 marzo 1901, pag. 25).

(2) A. Manzoni, *Il M. Titano (territorio della Repubblica di S. Marino), i suoi fossili, la sua età ed il suo modo d'origine* (Bull. d. R. Com. geol. d'Italia, pag. 5), 1873.

(3) Salmoiraghi F., *Osservazioni mineralogiche sul calcare miocenico di S. Marino* (M. Titano) (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di sc. ecc., ser. II, vol. XXXVI, 1903).

(4) Vedi il cit. lav. del Capellini.

cari della Verna, di Uffogliano, della Pescia romana, delle Vene del Tevere, di Sasso di Simone, di Pietra Bismantova ecc., che come il M. Titano costituivano quelle scogliere a *briozoi* ed a Crinoidi del mare del miocene medio, che insieme al calcare di Acqui ed ai calcari equivalenti e coi calcari ad *Amphistegina* di Subiaco ed equivalenti si formavano nella plaga delle laminarie od a profondità alquanto maggiore.

Le specie fossili che trovansi nel calcare del M. Titano sono le seguenti:

Foraminiferi.

Frondicularia sp.
Orbulina universa D'Orb.
Globigerina sp.
Operculina cfr. *langhiana* Trabucco (elv.).
» *De Stefani* » (elv.), ritenute in addietro *Nummulites* (aq., elv.).
Miogypsina cfr. *irregularis* Michelotti?

Echinidi.

Cidaris avenionensis Desmoul. (langh., elv.).
» *melitensis* non Forbes auct. ital.
Psammechinus sp. n.
Clypeaster crassicostatus Ag. (langh., elv.).
» sp. n.
Scutella sp. n.
Echinolampas angulatas Mérian (langh., elv.).
» *plagiosomus* Ag. » » (an. sp. distinguenda).
Pliolampas Silvestrii Airaghi (langh.).
» sp. n.
Linthia Locardi Tourn. (langh., elv.).
» cfr. *Lorioli* Airaghi (olig.)?
Pericosmus cfr. *callosus* Manzoni (langh.).
» *pedemontanus* De Alessandri (elv.).
» cfr. *spatangoides* De Loriol (eoc., olig.)?
Spatangus Manzonii Simonelli (langh.).
Hypsospatangus Peroni Cotteau »
Eupatagus sp. n.
Eupatagus sp. n.?

Briozoari.

Cellepora sp., *Membranipara Eschara*, etc.

Brachiopodi.

Terebratula Costae Seguenza (langh., elv.).
» sp. ind.

Anellidi.

Serpula sp. n.

Gasteropodi.

Cassis mammillaris Grat. (elv.).
» *miolaevigata* Sacco (langh., elv.).

Lamellibranchi.

Pecten persimpliculus Sacco = *Chlamys tauroperstriata* var. *persimplicula* Sacco (langh., elv.).
» *Northamptoni* Micht. (langh., elv.).
» *Haveri* » » »
» *scabrellus* Lk. (langh., elv., tort., mess., plioc., viv.).
» » var. *sanmarinensis* Fuchs.
» *Gentoni* Fontannes = *P. Celestini* (non Mayer) Fontanes = *Aequipecten multiscabrellus* Sacco (elv.).
» *Malvinae* Dub. (langh., elv., tort.).
» *revolutus* Micht. » » »
» *Fuchsi* Font. = *P. Manzonii* Fuchs = *P. cfr. subarcuatus* (Tourn.) Sacco (langh., elv., tort.).
» *longolaevis* Sacco = *P. cfr. nimius* (Font.) Fuchs = *P. substriatus* (non D'Orb.) Hörnes (pro parte) (langh., elv.).
» *Clarae* Viola. Specie notevole perchè già indicata nel calcare di Subiaco.
» *restitutensis* Fontannes = *P. latissimus* (non Brocchi) Fuchs = *Macrochlamys latissimus* var. *praecedens* Sacco (langh., elv.). Affine al *P. Ponzii* Meli, pliocenico.

Spondylus sp. n.
Ostrea digitalina Eichw. (langh., elv., tort., mess., plioc.
Venus miocenica Micht. (langh., elv., tort.).
» sp. ind.

Vertebrati. Pesci.

Oxyrhina Desorii Ag. (eoc., olig., langh., elv., tort., mess., plioc., viv.?).
Odontaspis contortidens Ag. (olig., langh., elv., tort., mess., plioc.).
Galeocerdo aduncus Ag. (eoc., olig., langh., elv., tort., mess., plioc.).
» *latidens* Ag. (eoc.?, olig., lang., tort., mess.?, plioc.?).
Carcharodon megalodon Ag. (langh., elv., tort., mess., plioc.).
Sargus Oweni Sismonda (langh., elv., tort., mess., plioc.).
Sphaerodus cinctus Ag. (olig., langh., elv., tort., mess., plioc.).

Cetacei.

Aulocetus sanmarinensis Capellini.

Ora se teniamo conto non solo della costituzione litologica del calcare ma principalmente dei fossili che sono appunto propri del miocene medio

e specialmente del langhiano e dell'elveziano, anzi di quest'ultimo sotto-piano, salvo qualche Echino attribuito al Langhiano, risulta sempre più all'evidenza che il calcare di S. Marino si è depositato in una zona intermedia fra quelle delle laminarie e quella coralligena. Esso corrisponde all'elveziano di Mayer, di mare alquanto profondo, quando a questo piano si dia un significato prettamente di facies litologica e paleontologica.

Se si volesse invece dare alle divisioni del miocene medio un significato strettamente cronologico si dovrebbe equiparare il calcare di S. Marino alla base del nostro miocene medio e per avventura all'aquitaniano quando però questo sotto-piano non fosse inteso nel senso di molti geologi francesi che lo attribuiscono all'Oligocene o Miocene inferiore. È però da notare che le stesse specie od almeno con leggere differenze che ancora non furono bene accertate, si trovano tanto nell'elveziano degli strati più alti del miocene medio italiano quanto in quelli più bassi, e ciò conforme all'opinione del De Stefani (1), che ritiene *elveziano, langhiano, tortoniano, messiniano primo* di Mayer, *zancleano* inf. di Seguenza come sinonimi e rappresentanti solo zone di diversa profondità. È però a considerare la presenza del *Pecten Clarae*, del *P. scabrellus* var. *sanmarinensis*, dello *Spondylus*, e forse di qualche Echino prossimo a specie oligoceniche, non ancora trovati negli strati più alti, e questi forse ci potranno dare un criterio per distinguere gli strati elveziani inferiori da quelli dell'elveziano superiore.

Per le cose dette la formazione calcarea del M. Titano, come stratigraficamente così anche paleontologicamente può riferirsi alla parte inferiore del miocene medio, non certo al miocene inferiore.

Biologia. — *Osservazioni sulla rigenerazione del cristallino* (2). Nota del dott. Ruggero Pardo, presentata dal Socio B. Grassi.

Il primo autore che descrisse, seguendolo microscopicamente, il processo per cui la lente cristallina, dopo allontanata dall'occhio degli anfibi urodeli, si riproduce prendendo origine dall'iride, fu il nostro Colucci nel 1890. E questa priorità gli fu rivendicata dall'Emery con una sua Nota pubblicata nell'Anat. Anz. nel 1897, quando i lavori di Wolff (il quale non conosceva gli studî del Colucci) parvero dare a questo autore il merito della scoperta che meravigliò ed interessò vivamente il mondo scientifico. Pochi fatti furono, come questo, tema di vive discussioni e di polemiche: lavori piovvero specialmente in Germania ed in Inghilterra, e la polemica raggiunse il suo

(1) C. De Stefani, *Les terr. tert. sup. du bassin de la Médit.* (Extrait des Ann. de la Soc. géol. de Belge, I, t. XVIII, Mémoires, 1891), 1893.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

acme nelle discussioni dottissime di Wolff e di Fischel. Ancor oggi, per altro, l'essenza del fenomeno ci sfugge.

Su proposta del chiarissimo prof. B. Grassi mi sono occupato quest'anno, nel suo Laboratorio, dell'argomento.

1. *Ho voluto vedere anzitutto se la rigenerazione ha luogo anche dopo la nevrotomia ottica.* A tutta prima sembrerebbe ricerca oziosa. Lavori precedenti hanno infatti dimostrato che se al taglio del nervo ottico segue negli anfibi la distruzione della retina (la quale poi rigenera), il processo necrotico si arresta sempre alla « pars ciliaris retinae » quella appunto donde si origina la nuova lente. Ma recentissimi studi di Lewis e di Speman hanno dimostrato che nello sviluppo normale della lente dall'epidermide è necessaria l'influenza della parte nervosa dell'occhio, e mentre si potè rilevare che tutte le parti dell'ectoderma sono atte ad originare la lente, tanto che perfino l'ectoderma della « rana palustris » può essere sostituito da quello della « rana silvatica », lo stimolo della coppa ottica, e quindi del sistema nervoso, è indispensabile allo sviluppo della lente. Orbene in tritoni adulti cui avevo tagliato il nervo ottico, e tolto il cristallo, ho ottenuto costantemente la rigenerazione di quest'ultimo. Con ciò resta un dubbio: È questo fatto cioè in contraddizione con quanto avviene nel normale sviluppo della lente, oppure il nervo ottico tagliato ristabilisce una continuità di fibre, o, per meglio dire, rigenera? A questa delicata questione, cercherò di dare risposta in altro mio lavoro.

2. Per quanto abbia cercato nella letteratura, non vidi che alcun autore abbia voluto indagare *se il potere rigenerativo dell'iride si esaurisce con una prima rigenerazione.* Mi parve interessante osservarlo, ed a tale scopo operai alcuni tritoni adulti di asportazione della lente; aspettai alcuni mesi onde il nuovo cristallino si fosse staccato dall'iride, quindi tolsi questa seconda lente rigenerata, ed ho potuto ottenere in tutti i casi la formazione di una terza lente. Sto ora sistematicamente seguendo il processo, al doppio scopo di vedere quando il potere rigenerativo si arresti, e se vi sieno differenze nel decorso di queste nuove rigenerazioni che chiamerei per ora « *birigenerazioni* ».

3. La rigenerazione del cristallino dall'iride, per animali in via di formazione, si osservò anche negli embrioni di pollo, che a completo sviluppo perdono tale proprietà. Fino ad oggi non fu potuto ottenere in animali adulti, altro che negli anfibi urodeli. Negli altri animali, solo quando rimaneva nell'occhio una parte della lente, si veniva formando talora un tessuto simile al cristallino, che prendeva origine dai resti della sostanza lenticolare. Tutte le altre esperienze di rigenerazione del cristallino dopo totale allontanamento dello stesso, fallirono. Solo Röthig, in una trota giovane, ottenne dopo 31 giorni una piccola neoformazione simile a lente, e fu l'unico caso ottenuto in un certo numero di trote operate.

Io ho creduto opportuno di fare ricerche nei rettili, ed operai sopra la *lacerta viridis* ottenendo in due casi la rigenerazione della lente. Queste ricerche feci nei mesi caldi, e ciò può avere una certa importanza, perchè in questa stagione i processi rigenerativi si mostrano attivissimi in confronto dei mesi freddi.

Sembrami l'accertamento della possibilità di rigenerare la lente, anche per una specie di rettili adulti, di un certo interesse, perchè anzitutto dimostra non essere un semplice fatto peculiare per gli anfibi, ma anche verificabile in animali ad essi superiori, e, a differenza degli anfibi, esclusivamente adattati alla vita terrestre, come la *lacerta viridis* da me sottoposta all'esperimento.

Biologia. — *Enucleazione ed innesto del bulbo oculare nei tritoni* [1]. Nota preventiva del dott. Ruggero Pardo, presentata dal Socio B. Grassi.

Nel fare le mie esperienze sulla rigenerazione della lente nei tritoni, avevo avuto campo di osservare la grande resistenza di questi animali a tutte quelle cause che di solito producono la morte dei tessuti.

È noto a tutti che se ad un tritone si taglia la coda, essa rigenera, così la zampa, così il cristallino, ecc. Essi vivono mesi senza essere nutriti, e non in condizione di letargo, come succede per gli altri animali, ma nel pieno sviluppo di vitalità, ed anche in condizioni in cui, per dover riparare a perdite di sostanza, avrebbero ancor più bisogno di assimilazione. Resistentissimi, lottano con la morte in modo incredibile. Quando dovevo sacrificare questi animali, tagliavo loro la testa, facendola cadere nel liquido fissatore. Ebbene, per dieci, dodici minuti continuavano movimenti vivacissimi delle palpebre e della mandibola.

Avevo inoltre osservato, durante le surriferite ricerche, che il bulbo oculare riacquistava quasi totalmente il suo aspetto normale, anche allora che rimaneva aderente alla cavità orbitaria per pochi brandelli.

Il generoso sbrigliamento dei tessuti orbitari che largamente incidevo per assicurarmi che il nervo ottico fosse completamente tagliato [2], lasciava infatti ben scarse fonti di nutrizione al bulbo oculare, e solo con l'ammettere processi di neoformazione ed attecchimento dei diversi tessuti fra di loro, era spiegabile la persistenza di vita nell'occhio operato, che si poteva distinguere, dopo qualche tempo, dal normale soltanto per un lieve color opalino della cornea e talora per un leggero impicciolimento complessivo.

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

[2] Vedi la mia Nota sulla *Rigenerazione del cristallino*.

Questi fatti mi invogliarono a tentare un esperimento. Enucleai completamente il bulbo, e, dopo averlo tenuto qualche poco nell'ambiente esterno, ed essermi assicurato che fosse completamente estratto ed integro, lo riposi nell'orbita. Abbandonai quindi gli animali a sè, senza suture od altrimenti artificialmente obbligar l'occhio nella cavità sua naturale. Orbene, con alcune necessarie precauzioni, che esporrò nel lavoro esteso, son riuscito ad ottenere nella quasi totalità dei casi, l'attecchimento dell'occhio.

Devo soltanto avvertire che la distanza massima di tempo trascorso dall'operazione alle surriferite osservazioni, fu di tre mesi, tempo abbastanza lungo per pensare che i fatti accertati sieno duraturi, ciò che del resto mi sarà dato rilevare dalle esperienze in corso.

L'occhio dapprima è leggermente esoftalmico, la cornea si opaca, non mai peraltro in modo da non lasciar scorgere attraverso ad essa l'iride. Dopo un certo tempo, l'occhio torna nella sua posizione normale, la cornea si rischiara quasi completamente, è soltanto il colore leggermente opalino, cui ho prima accennato, resta a distinguere questo dall'occhio normale.

Talora, come dissi, si osserva un complessivo lieve impicciolimento del bulbo oculare. Già il fatto di un bulbo oculare tolto dalla sua cavità dopo essere liberato da ogni aderenza, sì che esso non abbia tessuti adesi oltre le naturali membrane, e poi riposto nell'orbita senza suture, ma contenutovi soltanto dalla pressione delle palpebre e che, lungi dal necrotizzarsi, attecchisce come un innesto di tessuto semplice, e vive, è cosa biologicamente assai interessante.

Ma v'ha di più. Sono riuscito a sostituire l'occhio di un tritone con l'occhio di un altro, e se si bada a che il volume dell'organo innestato non sia maggiore della cavità che deve riceverlo, l'attecchimento si può anche in questo caso ottenere con esito ugualmente buono.

Anche un occhio destro si può sostituire col sinistro, ma nei pochi casi da me osservati, l'esito fu meno brillante e l'occhio rimase leggermente esoftalmico o un poco spostato, non corrispondendo il suo asse antero posteriore a quello dell'altro normale.

Non dubito che ulteriori esperienze mi condurranno anche in ciò a un esito soddisfacente.

Ricerche preliminari circa la sensibilità alla luce, mi fan credere che l'occhio innestato risenta quest'azione; dico — mi fan credere — perchè essendovi in questi animali anche una sensibilità cutanea alla luce, bisogna andar cauti nel trarre le conclusioni, e ripetere le esperienze in modo molto esatto e con mezzi adatti. Ciò che mi riprometto di fare con istrumenti ancor più delicati di quelli che fino ad oggi avevo a mia disposizione.

La sensibilità della cornea ho potuto rilevare che si ripristina.

Accennerò anche, sommariamente per ora, all'esame anatomico, dal quale risulta la cornea e la lente cristallina ritrovarsi dopo un certo tempo normalmente costituiti, l'iride e la coroide assai iperemiche. I muscoli dell'occhio

subiscono gravi alterazioni, ma si riattaccano rinnovandosi; si riformano quasi sempre i fornici.

Ed ora veniamo ad una parte che, per la sua delicatezza richiede tutta la nostra attenzione. Che avviene della retina e del nervo ottico?

Ansitutto, tre mesi dopo l'operazione (distanza massima di tempo a cui, come dissi, ho potuto esaminare gli animali da me operati) non bastano a dare un giudizio sulla stabilità di alcuni fatti, nè a permettere il completarsi di certi altri; secondariamente non fu abbastanza numeroso il materiale usato per generalizzare ancora i reperti. Io non voglio adunque avventare giudizii, nè esporre come regola ciò che può essere eccezione e viceversa, tuttavia, pur riserbandomi di trattare ampiamente la questione col riferire in una ventura pubblicazione i risultati degli studii che in proposito sto facendo, espongo i fatti fino ad ora osservati.

La retina si distrugge, ma poi si rigenera, cosa nota già per gli studî di Marchi e Graffini. Anche il moncone periferico del nervo si distrugge, ma in seguito ho ritrovato le fibre nervose ricchissime di cellule.

Il moncone centrale è in viva proliferazione. In un caso esaminato novanta giorni dopo l'operazione, i due monconi si erano riuniti; disgraziatamente essendo questo uno dei due primi animali operati, la fissazione (formolo) e la colorazione (emat. ed eos.) usate per averne una preparazione d'insieme, non mi permettono di dare giudizio sicuro sullo stato di queste fibre, che, pur avendo, a così grossolano esame, carattere di fibre normali, non si può dire se, ad un'osservazione più sottile coi metodi specifici, conserverebbero tale apparenza.

Non è solo il fatto del ritrovare il nervo continuo dopo averlo tagliato, che qui bisogna studiare, ma a questo fatto si riannodano le dibattute questioni sulla rigenerazione dei nervi: *le teorie sulla rigenerazione autogena* di cui son così forti sostenitori Bethe, Philipeaux, Vulpian ecc., e sulla *rigenerazione del moncone centrale* recentemente sostenuta e dimostrata dal Perroncito.

Fino ad oggi la rigenerazione del nervo ottico è negata o, per lo meno, non fu dimostrata. Ma in animali di tal specie, non furono, almeno a me non consta che siano state fatte, esperienze in tale senso. Ora l'esame microscopico ci mostra che in essi il nervo ottico si presenta sotto un aspetto peculiare e, cioè, anche nell'animale adulto vi è persistenza del canale centrale del nervo ottico, il quale adunque, allo stato di sua completa formazione, conserva il carattere che è proprio dei primi stadii di sviluppo del nervo stesso negli animali superiori. Ciò potrebbe fino un certo punto spiegare come esso possa presentare fatti di rigenerazione in confronto del nervo ottico di altri animali a questi superiori

Io non voglio avventare, come dissi, un giudizio decisivo, ma espongo i fatti come li ho osservati, riserbandomi di seguire il fenomeno con l'aiuto dei più fini metodi di ricerca dei quali oggi la tecnica istologica dispone e che, spero, mi permetteranno di venire a conclusioni sicure.

Patologia vegetale. — *La Typhula variabilis* R. *e il Mal dello Sclerozio della barbabietola da zucchero* (1). Nota del dott. Ugo Brizi, presentata dal Socio G. Cuboni.

Il così detto *Mal dello Sclerozio* della barbabietola, che tanti danni arreca qua e là, saltuariamente in certe annate, alle culture di barbabietola da zucchero, non è stato fin qui sufficientemente studiato perchè la crittogama causa di tale malanno non è stata finora definita. Soltanto il Prillieux nel 1895, studiando bietole da zucchero malate provenienti dalla Spagna, sospettò che il micelio e gli sclerozi che vi rinvenne, dai quali non ottenne mai la forma perfetta che permettesse di definirli, per la loro grande somiglianza con quelle della *Typhula variabilis* Riess, dovessero appunto riferirsi a questa crittogama.

Dopo il Prillieux, i pochissimi che si occuparono di tale malattia si limitarono a descrivere e accennare i caratteri delle alterazioni e la costante presenza degli sclerozi, attribuendoli allo *Sclerotium semen*, nè alcuno riuscì ad ottenere lo sviluppo di forme fruttifere dagli sclerozii.

Avendo avuta negli ultimi due anni possibilità di avere abbondante materiale da studio dalla provincia di Cremona, in parte da me raccolto e in parte per mezzo del prof. Alessandro Brizi, sono riuscito ad ottenere la forma fungina perfetta che deve appunto attribuirsi, come bene aveva sospettato Prillieux, alla *Typhula variabilis* Riess, determinando così definitivamente l'agente patogeno di questa interessante e dannosa malattia.

Le barbabietole da zucchero colpite dalla malattia nel mese di agosto, presentavano, all'inizio, delle larghe chiazze nerastre in vicinanza del colletto, chiazze che poi si estendevano, quasi sempre, da un solo lato della radice tuberizzata.

Sezionando le porzioni che apparivano alterate, al microscopio era facile vedere, con le opportune e consuete norme di preparazione e colorazione, un abbondante micelio sottile, ialino septato, il quale attraversa in tutti i sensi gli elementi del parenchima corticale, perfora le pareti, penetra nelle cavità cellulari, nelle quali spesso si avvolge in forma di gomitolo.

Il contenuto cellulare per la presenza del micelio era profondamente disorganizzato, mentre le pareti diventavano brune. I tessuti così alterati perdendo la tensione, in conseguenza della perdita del turgore delle cellule invase, inflaccidivano, per cui la superficie esteriore della radice, in corrispondenza delle porzioni malate, si presentava depressa, senz'altro carattere apparente.

(1) Dal Laboratorio di Patologia Vegetale della R. Scuola Sup. di Agric. Milano. Dicembre, 1906.

In seguito però, se le radici venivano tenute in ambiente caldo ed umido, il micelio si rendeva apparente anche all'esterno dei tessuti invasi, sotto forma di una sottile tela, simile a quella di un ragno, bianco-argentea, costituita da un intreccio, dapprima lasso, di fili di micelio a caratteri identici a quelli riscontrati nell'interno dei tessuti, poi a mano a mano più fitto, finchè diventa un vero feltro miceliare, fioccoso, bianco-argentino splendente.

La presenza del feltro fioccoso e argentino è assai evidente anche quando si estraggano dal suolo le barbabietole nelle quali la malattia è in istato avanzato. In tal caso l'intera radice tuberizzata e le radici laterali sono totalmente avvolte in una rete miceliare.

Sul bianco micelio ben presto appariscono dei piccoli grumi bianchissimi, costituiti da intreccio fittissimo di micelio che si avvolge a forma di gomitolo tondeggiante, dando così inizio alla formazione degli sclerozii, i quali ben presto assumono una forma determinata, sferica o sferoidale ed un colore rossastro o biondo, che talvolta rimane tale, e qualche altra volta diviene bruno cuoio o nerastro.

Questi sclerozii si producono in gran numero, tantochè non è difficile trovare delle barbabietole fortemente invase dal fungo, che sono tutte disseminate alla superficie di numerosi sclerozii, talvolta raggruppati in quantità considerevole, assai somiglianti a semi di piante diverse.

I più piccoli rassomigliano perfettamente ai semi del trifoglio ladino, soltanto che non sono perfettamente lisci, ma a superficie leggermente rugosa, altri somigliano a semi di ravizzone o di colza, e i più grossi a quelli della senape.

Frattanto la barbabietola, invasa sempre più dal micelio, viene totalmente disorganizzata per l'azione del micelio medesimo, e si trasforma in un ammasso putrido, dal quale è facile isolare a migliaia i piccoli sclerozii.

Questi ultimi sono costituiti da un lasso tessuto di filamenti intrecciati, i quali alla periferia formano una corteccia dura, resistentissima anche agli acidi diluiti.

Sembrandomi assai strano che gli sclerozii non dovessero dare alcuna forma fruttifera, ho tentato in molti modi di provocarne l'attività germinativa.

Anzitutto ho ottenuti gli sclerozii sviluppati in culture pure, portando piccole porzioni di micelio su fette di barbabietola cotta, sulle quali, in termostato alla temperatura di 26°-28°, cresce rigogliosamente, coprendo in poche ore il substrato di una frangia argentea. Diminuendo improvvisamente la temperatura fino a 18°, rapidamente dal micelio hanno origine numerosissimi piccoli sclerozii in tutto simili, e nell'aspetto e nella struttura, a quelli che si sviluppano direttamente sulle barbabietole ammalate.

Isolati i numerosi sclerozii così ottenuti e collocati su sabbia silicea umida, resa sterile, e in capsula di vetro sterile, e inumidito pure con acqua

sterile addizionata con un po' di saccarosio e peptone Witte, ho tentato di eccitare artificialmente la produzione dei corpi fruttiferi degli sclerozii, innalzando la temperatura e tenendoli costantemente in termostato, al buio, a circa 30° per molti giorni. Nessuno degli sclerozii germinò mai, per quante volte ripetessi la prova in tali condizioni. Alcuni si spaccarono sviluppando intorno una rosetta di micelio, che si estendeva più o meno rapidamente a seconda della ricchezza nutritiva del substrato, ma non più oltre di così.

Uguale insuccesso ottenni cimentando nello stesso modo gli sclerozii presi direttamente sulle barbabietole malate, da me stesso raccolte a Cremona e lasciate in laboratorio alla temperatura dell'ambiente. Neppure germinarono per quanto cercassi di variare fortemente le condizioni di luce, di temperatura, ecc., tanto che finii collo abbandonare quasi l'impresa.

Per conservare però vivente il fungo per ulteriori ricerche, continuai regolarmente i trapianti di coltura del micelio su fette di barbabietola cotta, per circa quattro mesi consecutivamente, operando il passaggio, sempre tenendo le colture a temperatura costante (20°-22°) in termostato durante tutto l'inverno circa una volta ogni dieci o dodici giorni.

Nel mese di febbraio, distratto da altri studî, abbandonai le colture in termostato, dove in quell'epoca per altre ricerche tenni una temperatura costante di 28°-30°, per oltre un mese, dopo il quale periodo trovai le fette di barbabietola, disseccate e fittamente coperte di piccoli sclerozii simili in tutto a quelli descritti, alcuni dei quali avevano prodotta la desiderata forma fruttifera, fin qui completamente ignota.

Da alcuni dei piccoli sclerozii si era sviluppato un sottîle peduncolo lungo da 2 cm. a 2 cm. e mezzo, portante all'estremità un rigonfiamento a forma di clava perfettamente simile a quello descritto e figurato da Brefeld (1) per la *Typhula variabilis*, colla differenza che quasi tutti gli stipiti portanti il frutto claviforme, anzichè essere semplici come quelli figurati da Brefeld, erano due o tre volte ramificati, e ciascuno dei singoli rami portava, a sua volta, un corpo fruttifero, come del resto accenna anche Winter (2).

Provai allora a collocare in termostato, alle stesse condizioni, su fette di barbabietola cotta, gli sclerozii che quattro mesi prima avevo presi direttamente dalle barbabietole infette e che avevo conservati chiusi in vaso di vetro.

Dopo circa un mese alcuni, pochissimi invero, degli sclerozii, avevano riprodotta la stessa forma fungina anzi descritta, che invano avevo cercato di ottenere qualche mese prima. Ciò si deve senza dubbio al fatto, come poi successive prove mi hanno dimostrato meglio, che gli sclerozii appena prodotti non sono capaci di germinare per dar luogo alla forma fruttifera per-

(1) *Botanische Untersuchungen über Schimmilpilze* Hf. III, 1877, pag. 182, tab. VIII, figg. 1-3.

(2) *Die Pilze*, 1° Abth., pag. 301 (in Rabenhorst's Kryptogamen Flora, 1 Bd., 1884.

fetta, e che occorrono parecchi mesi, da quattro a sei, perchè, probabilmente, si completi la loro maturazione fisiologica, in modo perfettamente analogo a quanto accade per le forme ibernanti di molti funghi come oospore, teleutospore, ecc., le quali, appena costituite, non sono germinabili, e come del resto si verifica in molti semi di piante fanerogame.

Ciò spiega l'insuccesso delle prime colture, e di quelle che ebbi occasione di fare molti anni fa, sin dal 1894, a Roma.

Gli sclerozii inoltre non producono i corpi fruttiferi se non a temperatura molto elevata, e vicina ai 30°, il che probabilmente può spiegare perchè la malattia si presenti sempre nel caldo estate e attacchi perciò soltanto le barbabietole già adulte, manifestando i suoi effetti appunto sul finire di agosto, e manchi completamente quando le barbabietole sono giovanissime. Ciò forse anche spiega la ragione per cui la malattia finora è nota solo nei paesi del mezzogiorno ed è sconosciuta nelle regioni nordiche.

Inoltre la fruttificazione avviene soltanto, a quanto sembra dalle prove comparative fatte, o almeno preferibilmente, nell'assenza di luce, giacchè gli sclerozii, collocati al buio, produssero la forma fruttifera descritta, quelli invece tenuti nelle stesse condizioni, ma in una stufetta di germinazione colle pareti anteriori di vetro e in modo da dar passaggio ad abbondante luce diffusa, non ne produssero affatto.

***

La germinazione dello sclerozio avviene per rottura dello straterello di ife cuticularizzate che formano la corteccia dello sclerozio stesso, e da tale rottura fuoriesce un fascetto di ife che si innalzano, più o meno erette, in modo da formare il sottile stipite, mentre altre ife isolate irraggiano alla base, si distendono sopra lo sclerozio coprendolo come di una sottile ragnatela e finiscono col ramificarsi sul substrato nutritivo in modo da meritare il nome di rizoidi dato ad essi da Brefeld (loc. cit.).

Il fascio di ife che diviene poi stipite, alla base di color biancastro e alla estremità violaceo, si allunga rapidamente e, il più delle volte, si ramifica subito in due o tre rametti dei quali uno conserva, in generale, dimensioni alquanto superiori e sul quale si differenzia più presto l'ingrossamento a clava su cui si sviluppa poi l'imenio, di un color gialliccio, o talvolta anche violaceo, d'aspetto ceroso.

I basidî sono corti, fitti, ramificati a rami più o meno varicosi, e clavati alla estremità dove portano due, tre o, più generalmente, quattro basidiospore, attaccate ai relativi sterigmi, brevissimi.

Le basidiospore germinano in modo assai facile e rapido, alla temperatura di 30° su decotto di radici di bietola filtrato e gelatinizzato al 15 % con aggiunta una piccola quantità di Agar.

Dànno origine ad un micelio bianco fioccoso, perfettamente simile a quello che trovasi sulle bietole malate, che invade ben presto tutto il substrato producendo direttamente i consueti piccoli sclerozii, appena la potenzialità nutritiva del substrato va esaurendosi.

Ho voluto poi fare delle prove per valutare l'azione patogena del fungo, partendo dal micelio nato dalle basidiospore.

Vista la facilità colla quale dalle barbabietole ammalate si può comunicare la malattia a bietole sane, soltanto collocando una porzione di tessuto infetto e ricco di micelio a contatto con la radice sana, ho provato lo stesso metodo col micelio in cultura pura ottenuto direttamente dalle basi diospore.

Su radici sanissime di bietola, a lungo lasciate in acqua corrente, liberate da ogni residuo di terriccio e ben lavate più volte con soluzione di formolo, collocavo, nelle condizioni opportune, delle piccole porzioni di substrato culturale con micelio in rigogliosa vegetazione, ottenuto dalla germinazione delle basidiospore, in punti diversi, presso al colletto, o sulla parte più grossa, od anche sulla porzione assottigliata del fittone.

Operando in tal modo e in tali condizioni l'infezione o non riusciva, od era tenuissima. Di dieci barbabietole da zucchero sperimentate, appena su tre, in corrispondenza della infezione praticata al colletto, vi fu evidente e spontanea, per quanto lenta, penetrazione del micelio attraverso lo strato sugheroso, ma i tessuti invasi non si putrefecero quasi affatto e la lesione rimase localizzata, per quanto le radici in esperimento fossero tenute in condizioni favorevoli allo sviluppo del fungo.

Ripetei più tardi la prova di infezione pensando di servirmi del micelio stesso, nato bensì da basidiospore, ma che aveva subìti successivi numerosi trapianti su fette di barbabietola o di carota cotte, ed ottenni risultati più decisivi.

Infatti il micelio, riprodotto e continuato per uno spazio di tempo di circa un mese, obbligandolo alla vita saprofitica su bietole cotte, si mostrò di una virulenza grandissima. Collocando dei pezzetti di bietola cotta invasi dal micelio, sopra bietole intere e sane, col metodo accennato più sopra, in capo a tre giorni alla temperatura di 26°-28° il micelio aveva perforato, nettamente, come era facile persuadersene coll'esame microscopico, lo strato sugheroso e aveva invaso i tessuti del parenchima corticale.

Una sola infezione bastava perchè l'intera radice, tenuta in termostato, venisse a poco a poco violentemente e interamente invasa dal micelio che sviluppavasi rapidamente all'interno e all'esterno, tanto da ridurre in otto o dieci giorni tutta la radice in completo stato di putrefazione per cancrena umida, con abbondante formazione, all'esterno, di sclerozii.

Il micelio che vive benissimo come aerobio fin che trovasi all'aria, si adatta senza dubbio alla vita anaerobia nell'interno dei tessuti della barbabietola e, probabilmente, a intensi fenomeni di respirazione intramolecolare

si deve il rapido disorganizzarsi dei tessuti. Infatti, comprimendo al torchio alcune delle barbabietole infettate artificialmente, in istato di non avanzata decomposizione, a nessun altro microrganismo dovuta se non al micelio della *Typhula*, raccogliendo il succo, diluendolo in quattro volumi di acqua distillata, poi filtrandolo accuratamente e sottoponendolo alla distillazione, era facile, con la reazione del iodio e idrato potassico, ottenere nel distillato la caratteristica formazione di iodoformio, denotante la presenza di alcool.

Riservandomi di pubblicare in seguito altri particolari biologici relativi al fungo, e in particolar modo circa l' importanza delle forme *oidiiformi* del micelio accennate da Brefeld (l. c.), ed i risultati di altri esperimenti in corso relativi a questa singolare malattia, ho creduto utile esporre queste poche ricerche interessanti, soprattutto perchè hanno chiarita senza dubbio l'origine di questa controversa malattia di una sì importante coltura, determinandone la causa efficiente in un fungo dell'ordine dei Clavariei, la *Typhula variabilis* Riees, e completando il suo ciclo di sviluppo.

Dimostrarono le prove accennate, oltre alla proprietà che hanno gli sclerozii di non essere germinabili se non dopo lungo tempo da che sono prodotti, e che ciò non ostante non sono germinabili se non al buio e a circa 28°-30°, anche il potere altamente patogeno del micelio di tale fungo, il quale è capace di penetrare, spontaneamente, in tessuti sani e senza precedente soluzione di continuità dei tegumenti, secernendo probabilmente qualche enzima idrolizzante. Un altro fatto importante hanno pure posto in luce, quale è quello della maggiore virulenza del potere patogeno del micelio stesso, infinitamente maggiore, quando per un certo tempo abbia vissuto vita puramente saprofitica, analogamente a quanto accade in alcune *Sclerotinie* ed in alcune *Ustilaginee*.

Questo comportarsi del micelio del fungo può spiegare perchè la malattia, come risulta dai dati raccolti e da diligente inchiesta fatta e da notizie che da molti anni possiedo su tale malattia, che ebbi occasione di conoscere e studiare fin dal 1894 e nel 1896 nei dintorni di Roma, si abbia preferibilmente, in terreni destinati la prima volta a coltura della barbabietola oppure anche in tutti quelli largamente provvisti di sostanza organica, la quale può mantenere senza dubbio a lungo il micelio allo stadio di vita saprofitica, e perciò più virulento quando trovi l'opportunità di divenire parassita.

Non è perciò improbabile che la malattia stessa si possa rendere meno temibile coll'uso di concimi minerali e di ammendamenti calcari, i quali senza dubbio giovano nel senso che limitava la quantità di sostanza organica, o ne rendono più spedita la decomposizione e quindi creano, in entrambi i casi, un ambiente meno favorevole alla vita saprofitaria del micelio della *Typhula variabilis* R.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna partecipa all'Accademia i ringraziamenti inviati per le loro recenti nomine, dai Corrispondenti Bottazzi, Enriques, e dal Socio straniero Fischer.

Lo stesso Presidente richiama l'attenzione dei Soci sul fatto che i due italiani, cui fu conferito il premio Nobel, appartengono entrambi all'Accademia; e quest'ultima delibera con voto unanime di esprimere ai Soci premiati, senatori Carducci e Golgi, le più vive felicitazioni. L'Accademia stabilisce ancora di farsi rappresentare alle onoranze che prossimamente saranno tributate in Milano al Socio senatore Colombo, in occasione del 50° anno del suo insegnamento.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle mandate dal Corrisp. Enriques e dal Socio straniero Reye; dai professori Jadanza e Brian; e un volume intitolato *Manual of the New Zeland Flora*, dono del Ministero neozelandese dell'Istruzione.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna dà comunicazione del seguente telegramma fatto inviare da S. M. la Regina Madre all'Accademia, in ringraziamento degli auguri pervenuti a S. M. in occasione del suo genetliaco dall'Accademia stessa.

Presidente Reale Accademia Lincei — Roma

S. M. la Regina Madre vivamente ringrazia Lei e cotesto alto Consesso, dei garbatissimi omaggi di devozione e di augurio.

La Dama d'Onore: M.sa Di Villamarina.

Il Presidente presenta poscia una medaglia inviata in dono dalla Società filosofica americana di Filadelfia, e coniata in occasione del 200° anniversario della nascita di Beniamino Franklin.

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia di Scienze Mediche e Naturali di Ferrara; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia delle scienze di Nuova York; le Società Reali di Londra e di Vittoria; le Società geologiche di Manchester, di Sydney e di Washington; la Società di scienze naturali di Basilea; i Musei di storia naturale di Bruxelles, di Amburgo e di Nuova York; la Società zoologica di Tokyo; gli Osservatorî di San Fernando e di Cambridge Mass.; la Biblioteca Reale di Berlino; le Università di St. Louis e di Upsala; la Scuola politecnica di Zurigo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 dicembre 1906.

Achiardi G. (D'). — Le cave di Tormalina dell'Isola d'Elba (dalla Rass. Miner. e della Ind. Chimica, XXV, 2). Torino, 1906. 8°.

Achiardi H. (D'). — Zeoliti del filone della Speranza presso S. Piero in Campo (Elba) (dagli Atti della Soc. Toscana di Sc. Nat. di Pisa, XXII). Pisa, 1906.

Agamennone G. — Le riunioni di Francoforte s. M. nell'ottobre 1904 e la III[a] Conferenza sismologica internazionale tenuta a Berlino, agosto 1906. Modena, 1906. 8°.

Agricoltura Belga (Cenni sull') e la sua partecipazione all'esposizione di Milano nel 1906. Livorno, 1906. 8°.

Alvisi P. — Rocce a Spinello dell'Isola d'Elba. Pisa, 1906.

Amodeo F. — Nuova analisi del trattato delle coniche di Gérard Desargues e cenni su J. B. Chaveau. (dai Rend. della R. Acc. della Sc. Fis. e Mat. di Napoli). Napoli, 1906. 8°.

Beekmam E. H. M. — Geschiedenis der systematische Mineralogie. S. Gravenhage, 1906. 8°.

Berlese R. e Paoli G. — Serie maschile della « Pollinia Pollinii » Costa (dal Redia, III, 2). Firenze, 1906. 8°.

Bruttini A. e Vaccari L. — Inchiesta sui Giardini alpini in relazione al miglioramento della Flora foraggera delle montagne. Relazione (Società degli Agricoltori Ital.). Roma, 1906, 8°.

Chantre E. — — Aperçu géographique de la Région Lyonnaise. Orographie, Géologie, Anthropologie. (Assoc. franç. pour l'avancement des sciences. Congrès de Lyon 1906). Lyon, 1906. 4°.

Chantre E. et Savoye C. — Le Département du Jura préhistorique. Répertoire et Carte paléoethnologique. (Compt. rend. de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences. Congrès de Grenoble, 1904). Paris, s. a. 8°.

Cirera R. — Notice sur l'Observatoire et sur quelques observations de l'éclipse du 30 août 1905. (Mém. de l'Observ. de l'Ebre, n. 1). Barcelone, 1906. 4°.

Donder Th. (de). — Sur les fonctions de Volterra et les invariants intégraux. (du Bull. de l'Acad. royale de Belgique. Cl. de sciences, n. 6). Bruxelles, 1906. 8°.

Duhem P. — Les origines de la statique (Les sources des Théories physiques) Tome II. Paris, 1906. 8°.

Faccin D. F. — Risultati delle osservazioni astronomiche fatte a Palma di Majorca (Isole Baleari) durante l'ecclisse totale di sole del 30 ag. 1905. (Dalla Rivista di Fsica Mat. e sc. nat. Pavia, anno VII, n. 79). Pavia, 1906. 8°.

Geigel R. — Die akustische Leistung von Communicationsröhren und Stethoskopen. (Separatabd. aus Virchow's Archiv für pathol. Anatomie n. 140 B. 1895). Berlin. s. a. 8°.

Geigel R. — Untersuchungen über die Mechanik der Expectoration. (Separatabd. aus Virchow's Archiv. für pathol. Anat. n. 161 B. 1906). Berlin, s. a. 8°.

Geigel R. — Die Entstehung der Geräusche in Herz und Gefassen. (Separatabd. aus Virchow's Archiv. für pathol. Anat. n. 140 Bd. 1895). Berlin, s. a. 8°.

Geigel S. — Entstehung und Zahl der normalen-Herztöne. (Separatabd. aus Virchow's Archiv. für pathol. Anat. 141 Bd. 1895). Berlin, s. a. 8°.

Geigel R. — Der erste Herzton. (Separatabd. aus der Münchener med. Wochenschrift. n. 17, 1906). s. l., 1906. 8°.

Geigel R. — Die Rolle des Liquor cere-

bralis bei der Circulation im Schädel. Bonn, 1905. 8°.

Geigel R. — Die Circulation im Gehirn und ihre Störungen. II. Die Mechanik des apoplectischen Insults bei Embolie. (Separatabd. aus Virchow's Arch. für path. Anat. 121 Bd. 1890), Berlin, s. a. 8°.

Geigel R. — Ein hydrodynamisches Problem und seine Anvendung auf den Kreislauf, speciell in Gehirn. (Separatabd. aus Virchow's Archiv. für pathol. Anat. 174 Bd. 1903). Berlin, s. a. 8°.

Geigel R. — Haben die Gehirngefässe ein constanten Volumen? (Separatabd. aus dem Archiv, für die ges. Physiol. Bd. 105). Bonn, 1904. 8°.

Guccia G. B. — Sopra una nuova espressione dell'ordine e della classe di una nuova curva gobba algebrica. (Dai Rend. del Circolo Mat. di Palermo, XXI, 1906). Palermo, 1906. 8°.

Guccia G. B. — Un théorème sur les courbes algébriques planes d'ordre n. Paris, 1906, 4°.

Guercio G. (Del). — Intorno a tre specie rare di Mizozilini italiani e alle diverse Galle prodotte da vari Afridi sul Populus Nigra. (Dal Rodia, vol. III, 2). Firenze, 1906.

Iadanza N. — Teoria dei canocchiali esposta secondo il metodo di Gauss. 2. ed. Torino, 1906. 8°.

Kapteyn J. C. — Plan of selected Areas. (Published by the Astrom. Laboratory at Groningen). Groningen, 1906. 8°.

Largaiolli V. — Ricerche biolimnologiche sui Laghi Trentini. 2. Lago di Terlago (dagli Atti dell'Accad. Veneto-trentino-istriana, cl. I, vol. III, f. 1). Padova, 1906. 8°.

Lebon E. — Sobre el número de números primos, desde 1 hasta n (de la Gaceta de Matem. III, 9. 10, 11, 12). Madrid, s. a. 8°.

Lebon E. — Sur la construction d'une table de caractéristiques relatives à la base 30.030 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à 901, 800, 900 (du Bull. de la Soc. Philomathique de Paris, VIII, 3). Paris, 1906. 8°.

Lebon E. — Theory and construction of tables for the rapid determination of the prime factors of a number (from the Bull. of the Amer. Math. Soc. New York, vol. XIII, 2). New York, 1906. 8°.

Lockyer N. e Baxandall F. E. — Some Stars with Peculiar Spectra (from the Proceedings of the R. Society London, vol. 77). London, 1906. 8°.

Lockyer N. — Tables of Wave-Lengths of enhaused lines. Compiled from investigations made at the Solar Physics Observatory Sout Kensington unter the direction of N. Lockyer. London, 1906, 4°.

Manasse. E. — Sopra le zeoliti di alcune rocce basaltiche della Colonia Eritrea. Pisa, 1906. 8°.

Meli. — Escursioni geologiche eseguite con gli Allievi ingegneri della R. Scuola di Applicazione di Roma nell'anno scolastico 1905-06. Cenni di relazione. Roma, 1906. 8°.

Meyer M. — Die Blinddarmentzündung, ihre Entstehung, Verhütung und Behandlung nach neueren Gesichtspunkten. München, 1906. 8°.

Meyer M. — Haarschwund und Glatze, ihre Verhütung, und Behandlung. 3 4. Auflage. München, 1906.

Moretti E. — Glaucoma secondario a lussazione spontanea del cristallino congenitamente ectopico (Annali di Ottalmologia, 1905). Pavia, 1905. 8°.

Moretti E. — L'iniezione di parafina fusa nella cura dell'entropion. Nota preventiva. Pavia, 1905. 8°.

Moretti E. — La via transpleurale nella cura delle lesioni violenti diaframmatiche. Contributo alla casuistica delle ferite toraco-diaframmatiche(dalla Clinica chirurgica, 1905). Milano, s. a. 8°.

Omori F. — Note on the San Francisco Earthquake of April 18, 1906 (Publ. of the Earthquake Invest. Committee etc. No. 21 App. II). Tokyto, 1806. 8°.

Palladino P. — Sur l'unité des forces et de la matière. Turin, 1906. 8°.

Pflüger E. — Die Ausführungsbestimmungen zum Reichsfleischbeschaugesetzt vom 30. Mai 1902, betreffend den Nachweis des Pferdefleisches, müssen schleunigst geändert werden (Separat. Abd. aus dem Archiv. für die ges. Physiologie Bd. 117) Bonn, 1906. 8°.

Pflüger E. — Eeine neue Methode der Glikogenanalyse (Separat. Abd. aus dem Archiv für die ges. Physiologie Bd. 114). Bonn, 1906. 8°.

Pflüger E. — Nochmals gegen die Ausfuhrungsbestimmungeu des Fleischbeschaugesetz vom 30. Mai 1902. (Separat. Abt. aus dem Archiv. für die ges Physiologie Bd. 113), Bonn, 1906. 8°.

Piolti G. — Sulla Breunnerite di Avigliana (Accad. R. delle Scienze di Torino, 1905-06). Torino, 1906. 8°.

Roccati A. — Microrganito con inclusi di Gneis del colle Brocan (Valle del Gesso delle Rovine) (Accad. R. delle scienze di Torino, 1905-06). Torino, 1906. 8°.

Roccati A. — Omfacite cromifera e Pirallolite ferrifera del lago Brocan. Valle del Gesso di Entraque (dal Boll. della Soc. Geol. Ital. XXIV, 2). Roma, 1905. 8°.

Raccati A. — Rodonite di Chiaves e di altre località delle valli di Lanzo. (Accad. R. delle scienze di Torino, 1905-06). Torino, 1906. 8°.

Sacco F. — Comptes rendus des excursions. Réunion extraord. de la Soc. Géol. de France en Italie Turin et à Gènes en 1906. (Extr. du Bull. de la Soc. géol. de France. 4. seris, tome V). Paris, 1806. 8°.

Sacco F. — Les étages et les faunes du Bassin Tertiaire du Piémont. (Extr. du Bull. de la Soc. géol. de France 4. série. tome V). Paris, 1906.

Sacco F. — La Galleria ferroviaria di Gattico. — Linea Santhià-Arona (dagli atti della Soc. Ital. di Scienze nat. XLV). Milano, 1906. 8°.

Sacco F. — Fenomeni di corrugamento negli schisti cristallini delle Alpi. (Accad. R. delle scienze di Torino, 1905-06). Torino, 1906. 8°.

Sacco F. — La questione eo-miocenica dello Appennino (dal Boll. della Soc. Geol. Ital., vol. XXV. f. I). Roma, 1906. 8°.

Sacco F. — La Regione Tortonese prima della comparsa dell'uomo (dal IX Boll. della Soc. per gli Studi di Storiad'Economia e d'Arte nel Tortonese). Tortona, 1906. 8°.

Sacco F. — Le sorgenti della Galleria ferroviaria del Colle di Tenda (dal Giornale di Geologia pratica, IV, I). Perugia, 1905. 8°.

Sacco F. = Sur la valeur stratigraphique des Lepydocyclina et des Miogypsina (Extr. du Bull. de la Soc. Géol. de France 4. série, t. V). Paris, 1906. 8°.

Silvestri F. — Descrizione di un nuovo genere di Rhipiphoridae (dal Rodia, III, 2). Firenze, 1906. 8°.

Silvestri F. — Note sui « Machilidae ». (dal Redia, III, 2). Firenze, 1906. 8°.

Söhngen N. L. — Het ontstaan en verdwijnen van Waterstof en methaan onder den invloed van het organische leven. Delft, 1906. 8°.

Tommasina Th. — Exposé de nouvelles expériences sur la radioactivité induite, avec quelques considérations théoriques (Extr. de la Revue Polytechn. n. 165-171, 1906, Genève). Genève, 1906. 4°.

Volante G. — Intorno alle condizioni igieniche e sanitarie in cui si svolsero i lavori della Galleria del Sempione, con prefazione del prof. L. Pugliani. Torino, 1906, 8°.

E. M.